Matemáticas III

Tercer grado. Volumen I

TELEsecundaria

Matemáticas III

Tercer grado. Volumen I

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

TELEsecundaria

Matemáticas III. Volumen I fue elaborado en la Coordinación de Informática Educativa del Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE), de acuerdo con el convenio de colaboración con la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

Autores
Araceli Castillo Macías, Rafael Durán Ponce, Silvia García Peña, José Cruz García Zagal, Olga Leticia López Escudero, Jesús Rodríguez Viorato

Asesoría académica
María Teresa Rojano Ceballos (DME-Cinvestav)
Judith Kalman Landman (DIE-Cinvestav)

Revisores académicos externos
David Francisco Block Sevilla, Carlos Bosch Giral, Luis Alberto Briseño Aguirre

Apoyo técnico y pedagógico
María Catalina Ortega Núñez

Diseño de actividades tecnológicas
Mauricio Héctor Cano Pineda, Emilio Domínguez Bravo, Deyanira Monroy Zariñán

Coordinación editorial
Sandra Hussein Domínguez

Portada
Diseño: Martín Aguilar Gallegos
Iconografía: Irene León Coxtinica
Imagen: *El tianguis* (detalle), 1923-1924, Diego Rivera (1886-1957), fresco, 4.60 × 2.37 m (panel central), ubicado en el Patio las Fiestas, planta baja, D. R. © Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Proyectos Editoriales y Culturales/ fotografía de Gerardo Landa Rojano; D.R. © 2019 Banco de México, Fiduciario en el Fideicomiso relativo a los Museos Diego Rivera y Frida Kahlo. Av. 5 de Mayo No. 2, col. Centro, Cuauhtémoc, C. P. 06059, Ciudad de México; reproducción autorizada por el Instituto Nacional de Bellas Artes y Literatura, 2019.

Servicios editoriales

Dirección de arte
Rocío Mireles Gavito

Diseño
Zona Gráfica

Diagramación
Bruno Contreras, Víctor Vilchis

Iconografía
Cynthia Valdespino

Ilustración
Curro Gómez, Víctor Eduardo Sandoval, Gabriela Podestá, Juan Pablo Romo

Fotografía
Cynthia Valdespino, Fernando Villafán

Primera edición, 2008
Segunda edición, 2019. Ciclo escolar 2019-2020

ISBN: 978-607-551-170-2 (obra completa)
ISBN: 978-607-551-172-6 (volumen I)

Impreso en México

Índice

Bloque 1

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
1. Productos notables y factorización. **[12–31]** Efectuar o simplificar cálculos con expresiones algebraicas tales como: $(x + a)^2$; $(x + a)(x + b)$; $(x + a)(x - a)$. Factorizar expresiones algebraicas tales como: $x^2 + 2ax + a^2$; $ax^2 + bx$; $x^2 + bx + c$; $x^2 + a^2$.	1.1 A formar cuadrados	Programa 1		
	1.2 El cuadrado de una diferencia		Interactivo	
	1.3 La diferencia de dos cuadrados			
	1.4 A formar rectángulos	Programa 2		
	1.5 Un caso especial de factorización			
2. Triángulos congruentes y cuadriláteros. **[32–39]** Aplicar los criterios de congruencia de triángulos en la justificación de propiedades de los cuadriláteros.	2.1 Lados opuestos iguales			La diagonal de un paralelogramo (Geometría dinámica)
	2.2 Puntos medios	Programa 3	Interactivo	Cómo verificar la congruencia de las figuras (Geometría dinámica)
3. Entre rectas y circunferencias. **[40–47]** Determinar mediante construcciones las posiciones relativas entre rectas y una circunferencia y entre circunferencias. Caracterizar la recta secante y la tangente a una circunferencia.	3.1 Puntos en común			
	3.2 Trazos de tangentes	Programa 4	Interactivo	Tangentes (Geometría dinámica)
	3.3 Entre circunferencias		Interactivo	
	3.4 Algunos problemas	Programa 5		
4. Ángulos en una circunferencia. **[48–57]** Determinar la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco.	4.1 Dos ángulos de una circunferencia			Ángulos inscritos en una circunferencia (Geometría dinámica)
	4.2 Relaciones a medias			
	4.3 Probemos que uno de los ángulos es la mitad del otro	Programa 6	Interactivo	
	4.4 Problemas de medida	Programa 7		
5. Problemas con curvas. **[58–61]** Calcular la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona.	5.1 Sólo una parte	Programa 8	Interactivo	
	5.2 Lo que resta			
	5.3 De todo un poco			
6. La razón de cambio. **[62–73]** Analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y relacionarla con la inclinación o pendiente de la recta que lo representa.	6.1 El incremento			¿Sabes que es una razón? (Hoja de cálculo)
	6.2 Pendiente y razón de cambio	Programa 9	Interactivo	
	6.3 Algunas razones de cambio importantes	Programa 10		
7. Diseño de experimentos y estudios estadísticos. **[74–87]** Diseñar un estudio o experimento a partir de datos obtenidos de diversas fuentes y elegir la forma de organización y representación tabular o gráfica más adecuada para presentar la información.	7.1 Diseño de un estudio estadístico. ¿Qué materia te gusta más?	Programa 11	Interactivo	
	7.2 Un juego de letras. Otro estudio estadístico			
	7.3 ¿Qué cantidad de agua consumen diariamente los alumnos de tercer grado?	Programa 12		
EVALUACIÓN				

Bloque 2

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
8. Ecuaciones no lineales. **[90–99]** Utilizar ecuaciones no lineales para modelar situaciones y resolverlas utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	8.1 El número secreto	Programa 13		Ecuaciones con más de una solución I (Calculadora)
	8.2 Cubos, cuadrados y aristas			
	8.3 Menú de problemas	Programa 14	Interactivo	
9. Resolución de ecuaciones por factorización. **[100–111]** Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	9.1 ¿Cuánto miden los lados?	Programa 15		
	9.2 Los factores de cero		Interactivo	
	9.3 El adorno	Programa 16		
	9.4 Apliquemos lo aprendido			
10. Figuras semejantes. **[112 – 117]** Construir figuras semejantes y comparar las medidas de los ángulos y de los lados.	10.1 Un corazón muy especial	Programa 17	Interactivo	
	10.2 Aplicaciones de la semejanza	Programa 18	Interactivo	
11. Semejanza de triángulos. **[118– 127]** Determinar los criterios de semejanza de triángulos. Aplicar los criterios de semejanza de triángulos en el análisis de diferentes propiedades de los polígonos. Aplicar la semejanza de triángulos en el cálculo de distancias o alturas inaccesibles.	11.1 Explorando la semejanza de triángulos	Programa 19		
	11.2 Criterios de semejanza de triángulos I			Idea de triángulos semejantes (Geometría dinámica)
	11.3 Criterios de semejanza de triángulos II			
	11.4 Cálculo de distancias	Programa 20	Interactivo	
12. Índices. **[128–143]** Interpretar y utilizar índices para explicar el comportamiento de diversas situaciones.	12.1 El Índice Nacional de Precios al Consumidor	Programa 21		
	12.2 Índices en la escuela			
	12.3 ¿Quién es el pelotero más valioso?	Programa 22		
	12.4 Más sobre índices		Interactivo	
13. Simulación. **[144 –155]** Utilizar la simulación para resolver situaciones probabilísticas.	13.1 Simulación	Programa 23		
	13.2 Aplicando la simulación			
	13.3 Simulación y tiros libres	Programa 24	Interactivo	Simulación con el modelo de urna (1) (Hoja de cálculo)
EVALUACIÓN				

Bloque 3

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
14. Relaciones funcionales en otras disciplinas. Reconocer en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar la regla que modela esta variación mediante una tabla o una expresión algebraica.	14.1 El área de la imagen	Programa 25	Interactivo	
	14.2 El corral de los conejos			
	14.3 El medio litro de leche	Programa 26		
15. Resolución de ecuaciones cuadráticas por la fórmula general. Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la fórmula general.	15.1 La fórmula general	Programa 27		
	15.2 El beisbolista		Interactivo	
	15.3 Cuántas soluciones tiene una ecuación	Programa 28		
	15.4 La razón dorada			
16. Teorema de Tales. Determinar el teorema de Tales mediante construcciones con segmentos. Aplicar el teorema de Tales en diversos problemas geométricos.	16.1 La culpa es de las paralelas	Programa 29	Interactivo	Teorema de Tales (Geometría dinámica)
	16.2 Proporcionalidad vs paralelismo	Programa 30		Recíproco del teorema de Tales (Geometría dinámica)
	16.3 Ahí está el teorema de Tales			
17. Figuras homotéticas. Determinar los resultados de una homotecia cuando la razón es igual, menor o mayor que 1 o que –1. Determinar las propiedades que permanecen invariantes al aplicar una homotecia a una figura. Comprobar que una composición de homotecias con el mismo centro es igual al producto de las razones.	17.1 Especialmente semejantes	Programa 31	Interactivo	La homotecia como aplicación del teorema de Tales (Geometría dinámica)
	17.2 Depende de la razón	Programa 32		
18. Gráficas de relaciones. Interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no lineales para modelar diversas situaciones o fenómenos.	18.1 Plano inclinado	Programa 33	Interactivo	
	18.2 La ley de Boyle	Programa 34		
	18.3 La caja			
19. Algunas características de gráficas no lineales. Establecer la relación que existe entre la forma y la posición de la curva de funciones no lineales y los valores de las literales de las expresiones algebraicas que definen a estas funciones.	19.1 ¡Abiertas y más abiertas!	Programa 35	Interactivo	Funciones cuadráticas (Hoja de cálculo)
	19.2 ¡Para arriba y para abajo!		Interactivo	
	19.3 Las desplazadas		Interactivo	
	19.4 ¡Ahí les van unas cúbicas!	Programa 36	Interactivo	
	19.5 ¡Ahí les van unas hipérbolas!		Interactivo	
	19.6 Efectos especiales		Interactivo	
20. Gráficas por pedazos. Interpretar y elaborar gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	20.1 Las albercas	Programa 37	Interactivo	
	20.2 Diversos problemas			
EVALUACIÓN				

Bloque 4

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
21. Diferencias en sucesiones. Determinar una expresión general cuadrática para definir el enésimo término en sucesiones numéricas y figurativas utilizando el método de diferencias.	21.1 Números figurados	Programa 38	Interactivo	
	21.2 Las diferencias en expresiones algebraicas			
	21.3 El método de diferencias	Programa 39		
	21.4 Apliquemos lo aprendido			
22. Teorema de Pitágoras. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.	22.1 ¿Qué es el teorema de Pitágoras?	Programa 40	Interactivo	Teorema de Pitágoras (Geometría dinámica)
	22.2 Aplicaciones del teorema de Pitágoras I	Programa 41		
	22.3 Aplicaciones del teorema de Pitágoras II			
23. Razones trigonométricas. Reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los lados. Calcular medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas. Resolver problemas sencillos, en diversos ámbitos, utilizando las razones trigonométricas.	23.1 La competencia	Programa 42	Interactivo	Ángulo de elevación y depresión (Hoja de cálculo)
	23.2 Cosenos y senos			
	23.3 30°, 45° y 60°	Programa 43		
	23.4 A resolver problemas		Interactivo	
24. La exponencial y la lineal. Interpretar y comparar las representaciones gráficas de crecimiento aritmético o lineal y geométrico o exponencial de diversas situaciones.	24.1 Crecimiento de poblaciones	Programa 44	Interactivo	
	24.2 Interés compuesto			
	24.3 Gráfica de la exponencial	Programa 45		
	24.4 La depreciación de las cosas			
25. Representación de la información. Analizar la relación entre datos de distinta naturaleza, pero referidos a un mismo fenómeno o estudio que se presenta en representaciones diferentes, para producir nueva información.	25.1 Muchos datos	Programa 46	Interactivo	
	25.2 De importancia social			
EVALUACIÓN				

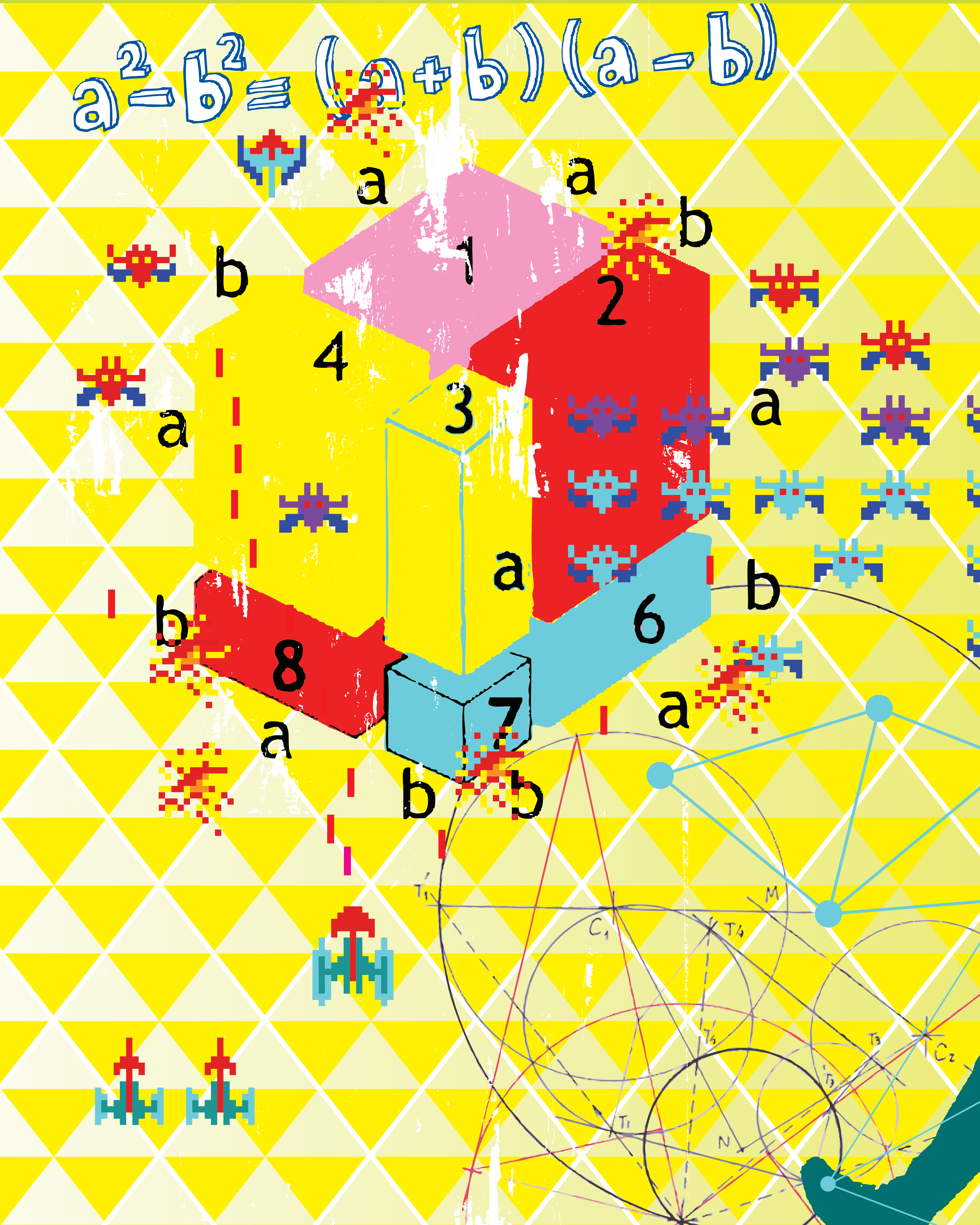
Bloque 5

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
26. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Dado un problema, determinar la ecuación lineal, cuadrática o sistema de ecuaciones con que se puede resolver, y viceversa, proponer una situación que se modele con una de esas representaciones.	26.1 Los discípulos de Pitágoras	Programa 47		
	26.2 Ecuaciones y geometría		Interactivo	
27. Conos y cilindros. Anticipar las características de los cuerpos que se generan al girar o trasladar figuras. Construir desarrollos planos de conos y cilindros rectos. Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Determinar la variación que se da en el radio de los diversos círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en una esfera cono recto.	27.1 Sólidos de revolución	Programa 48		
	27.2 Cilindros	Programa 49		
	27.3 Conos		Interactivo	
	27.4 Secciones de corte			
28. Volumen del cono y del cilindro. Construir las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos.	28.1 Tinacos de agua	Programa 50	Interactivo	
	28.2 Conos de papel	Programa 51		
29. Estimar volúmenes. Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos. Calcular datos desconocidos dados otros relacionados con las fórmulas del cálculo de volumen.	29.1 Problemas prácticos	Programa 52	Interactivo	
30. Gráfica caja-brazo. Interpretar, elaborar y utilizar gráficas de cajabrazos de un conjunto de datos para analizar su distribución a partir de la mediana o de la media de dos o más poblaciones.	30.1 Interpretación de datos	Programa 53	Interactivo	
	30.2 Construcción de la gráfica caja-brazos			
	30.3 Comparación de datos mediante la gráfica de caja-brazos	Programa 54		
EVALUACIÓN				

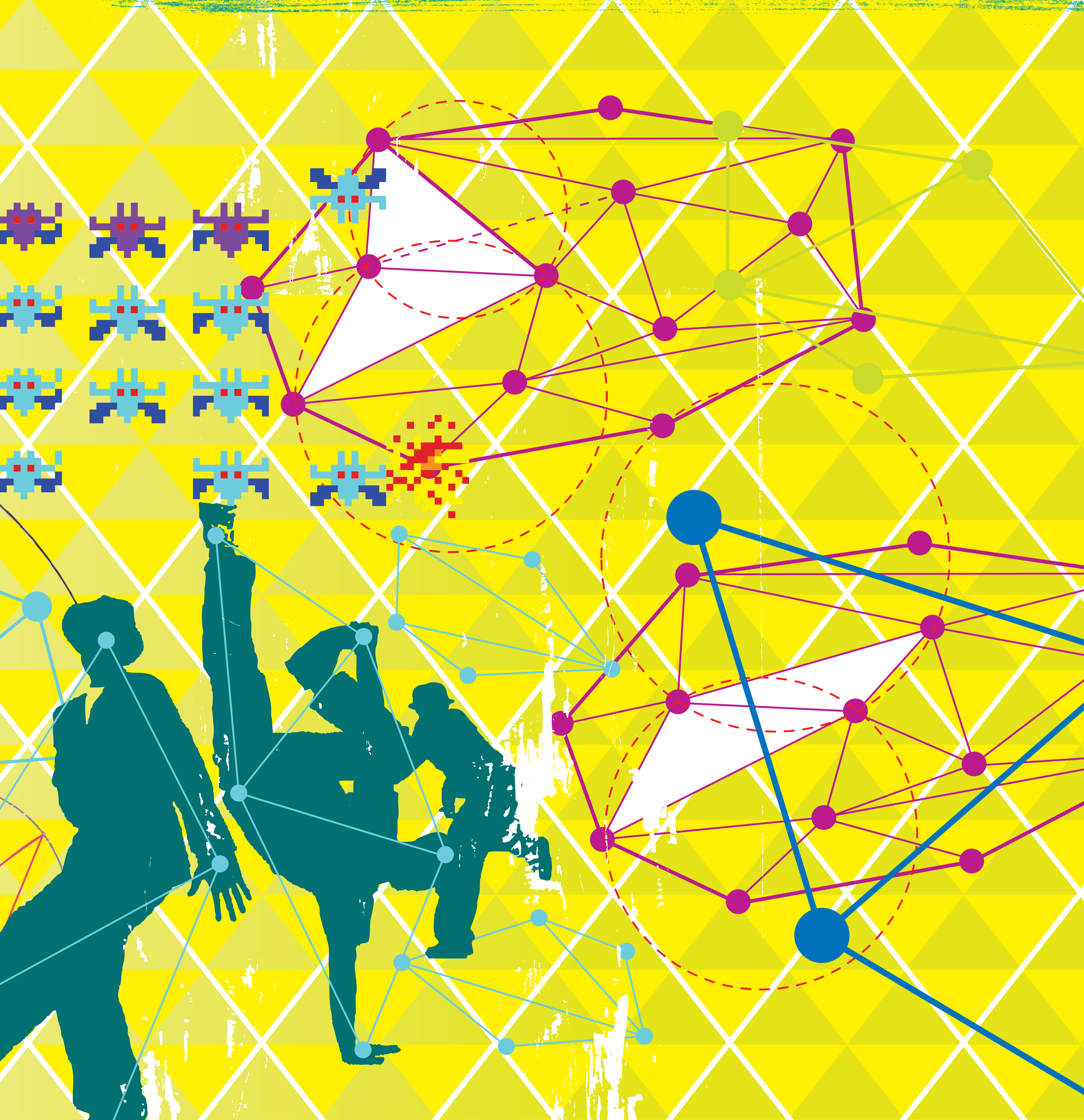
EJE 1:	Sentido numérico y pensamiento algebraico
EJE 2:	Forma, espacio y medida
EJE 3:	Manejo de la información

Clave de logos

	Trabajo individual		Sitios de Internet
	En parejas		Bibliotecas Escolares y de Aula
	En equipos		Programa de Televisión
	Todo el grupo		Interactivo
	Conexión con otras asignaturas		Audiotexto
	Glosario		Aula de Medios
	Consulta otros materiales		Otros Textos
	CD de recursos		


$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
a
a
b
b
1
2
4
3
a
a
a
b
6
b
8
7
a
a
b
b
M
C_1
T_4
T_3
C_2
N

BLOQUE 1



Productos notables y factorización

En esta secuencia descubrirás procedimientos simplificados para efectuar multiplicaciones con expresiones algebraicas y para encontrar los factores que dan lugar a un producto algebraico determinado.

SESIÓN 1

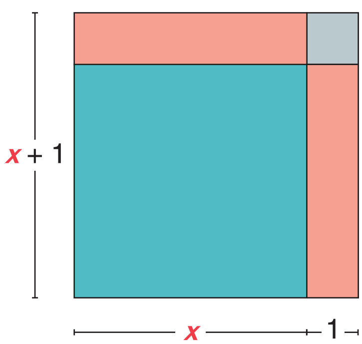
A FORMAR CUADRADOS

>>> Para empezar

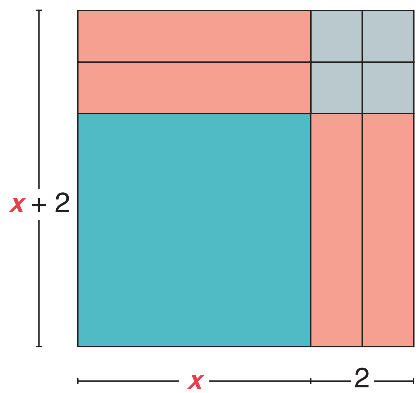
Los bloques algebraicos son una herramienta que permite representar operaciones con expresiones algebraicas. En la secuencia 12 de **Matemáticas II**, volumen I los usaste para multiplicar polinomios; ahora, te ayudarán a encontrar, de manera simplificada, el resultado de elevar al cuadrado un binomio .

Recorta los **Bloques algebraicos** del anexo 1 **Recortables** y pégalos en cartón.

Con bloques de áreas x^2, x y 1 forma cuadrados de diferente tamaño e identifica la expresión algebraica que corresponde a la medida de sus lados como se muestra en las dos figuras siguientes.

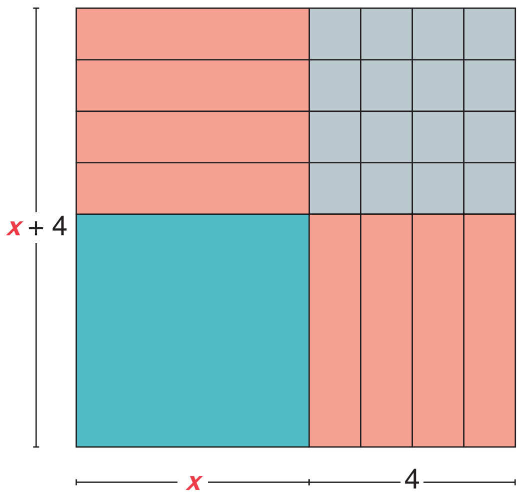


$$A = x^2 + x + x + 1$$
$$= x^2 + 2x + 1$$



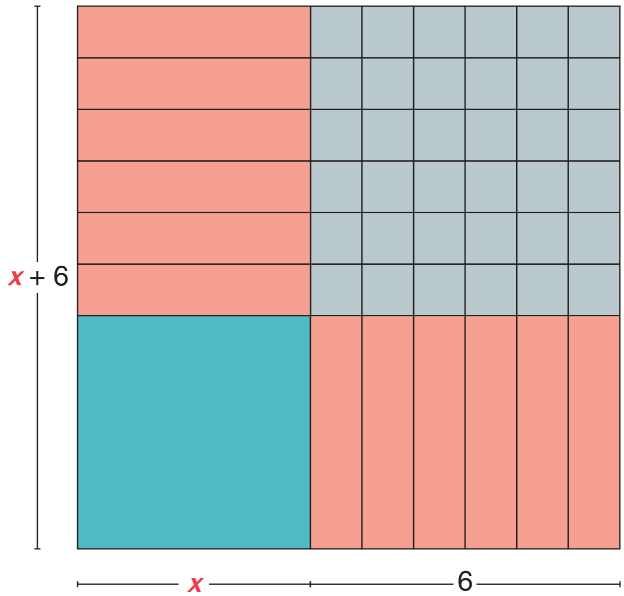
$$A = x^2 + 2x + 2x + 4$$
$$= x^2 + 4x + 4$$

Encuentra el trinomio que representa el área de los dos cuadrados siguientes.



A = ______________

= ______________



A = ______________

= ______________

>>> Consideremos lo siguiente

En la siguiente tabla aparecen binomios que representan las medida del lado de diferentes cuadrados, así como los trinomios que corresponden a sus respectivas áreas.

a) Examina los dos primeros ejemplos y completa la siguiente tabla.

Binomio	Trinomio
$x + 1$	$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
$x + 2$	$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$
$x + 3$	$(x + 3)^2 =$
$x + 4$	$(x + 4)^2 =$
$x + 6$	$(x + 6)^2 =$
$x + 10$	$(x +10)^2 =$

b) Subraya el trinomio que representa el área de un cuadrado cuyo lado mide $x + 100$.

$x^2 + 100x + 10\,000$ $\quad$ $x^2 + 10\,000$ $\quad$ $x^2 + 200x + 10\,000$

Comparen sus soluciones. Comenten cómo obtuvieron los trinomios que son resultado de elevar los binomios al cuadrado.

>>> Manos a la obra

I. La figura 1 muestra un cuadrado que mide de lado $x + 5$.

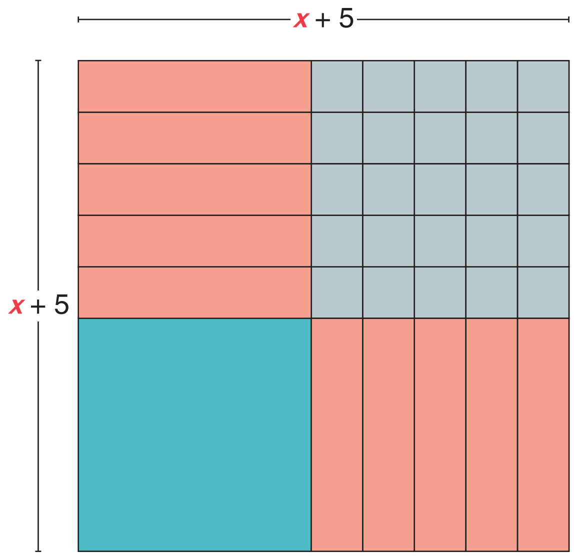


Figura 1

a) ¿Cuántos bloques de área x^2 se utilizaron para formar el cuadrado? ____________

b) ¿Cuántos de área x? ____________

c) ¿Cuántos de área 1? ____________

d) De las siguientes expresiones, subrayen las que representan el área del cuadrado.

$x + 5$

$x^2 + 5x + 5x + 25$

$x^2 + 25$

$x^2 + 10x + 25$

e) Verifiquen si las expresiones que subrayaron se obtienen al elevar al cuadrado el binomio $x + 5$. Para eso, completen la multiplicación $(x + 5)(x + 5)$ y luego sumen los términos semejantes para obtener un trinomio.

$(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$

$=$ ____________________

$=$ ____________________

Recuerden que:

Para multiplicar dos binomios se multiplica cada término de un binomio por todos los términos del otro y luego se suman los términos que son semejantes.

$(x + 7)(x + 7) = x^2 + 7x + 7x + 49$

$= x^2 + 14x + 49$

Comparen sus soluciones y comenten cuál de los siguientes procedimientos usarían para hacer de manera simplificada la multiplicación $(x + 8)(x + 8)$, sin necesidad de hacer una multiplicación término por término.

- El resultado se obtiene sumando el cuadrado del primer término (x^2) y el cuadrado del segundo término (64).
- El resultado se obtiene sumando el cuadrado del primer término (x^2) más el producto de los dos términos ($8x$) más el cuadrado del segundo término (64).
- El resultado se obtiene sumando el cuadrado del primer término (x^2) más el doble del producto de los dos términos ($16x$) más el cuadrado del segundo término (64).

Verifiquen sus reglas haciendo la multiplicación $(x + 8)(x + 8)$.

II. Eleven al cuadrado el binomio $(2x + 3)$ y multipliquen término por término para obtener cuatro productos parciales como lo indican las líneas. Luego sumen los términos semejantes hasta obtener un trinomio.

$\boxed{4x^2}$ $\boxed{}$

$$(2x + 3)\,(2x + 3) = 4x^2 + 6x + \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$\boxed{}$ +

Trinomio cuadrado perfecto

$\boxed{6x}$ $\boxed{12x}$

a) ¿Qué relación hay entre el término $4x^2$ del trinomio y el término $2x$ del binomio?

____

b) ¿Qué relación hay entre el 9 del trinomio y el 3 del binomio? ________________

c) ¿Cuántas veces aparece el producto parcial $6x$ en la multiplicación? __________

d) ¿Qué términos del binomio se multiplicaron para obtenerlo? ________________

e) ¿Qué relación hay entre el término $12x$ del trinomio y el producto de los dos términos del binomio? __________________________

Comparen sus soluciones y encuentren una procedimiento simplificado para obtener el trinomio que resulta al efectuar la operación $(3x + 2)^2$, sin necesidad de hacer una multiplicación término por término.

>>> A lo que llegamos

La expresión que resulta al elevar al cuadrado un binomio se llama trinomio cuadrado perfecto.

El siguiente procedimiento permite obtener el resultado de manera simplificada.

El primer término del binomio se eleva al cuadrado

El segundo término del binomio se eleva al cuadrado

$$(3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

Se multiplican ambos términos
$(3x)\,(5) = 15x$

Se duplica el producto
$(2)\,(15x) = 30x$

>>> Lo que aprendimos

Escribe el binomio al cuadrado o el trinomio cuadrado perfecto que falta en cada renglón de la siguiente tabla.

Binomio al cuadrado	Trinomio cuadrado perfecto
$(x + 9)^2$	
$(3x + 1)^2$	
	$x^2 + 24x + 144$
$(2m + 5)^2$	
	$4x^2 + 36x + 81$

SESIÓN 2

EL CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

>>> Consideremos lo siguiente

Del cuadrado de la figura 2 se recortaron algunas partes hasta que quedó otro cuadrado más pequeño, como se muestra en la figura 3.

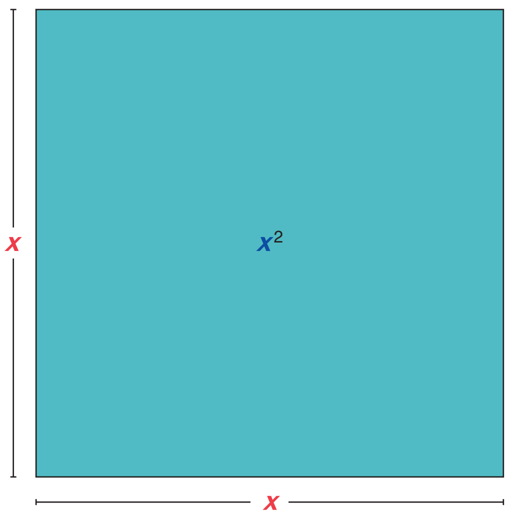


Figura 2

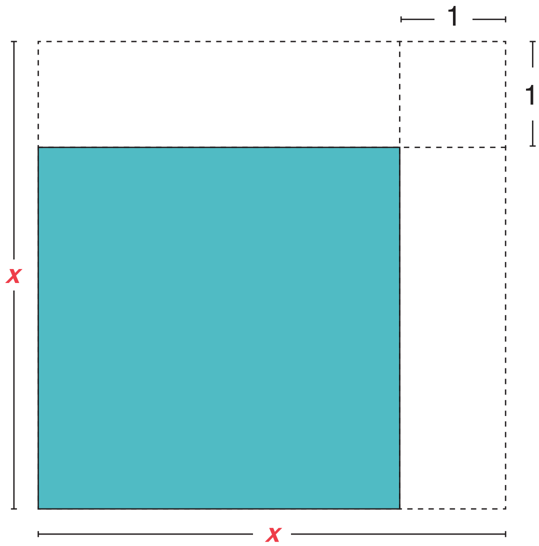


Figura 3

a) ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado azul de la figura 3? _______________

b) La expresión algebraica que representa el área del cuadrado azul es: _______________

Comparen sus soluciones.

>>> Manos a la obra

I. Ana y Ricardo decidieron usar algunos bloques algebraicos para completar el área del cuadrado azul de la figura 3.

Ricardo se dio cuenta de que con un bloque de área x y otro de área $x - 1$ podía completar el cuadrado de lado x.

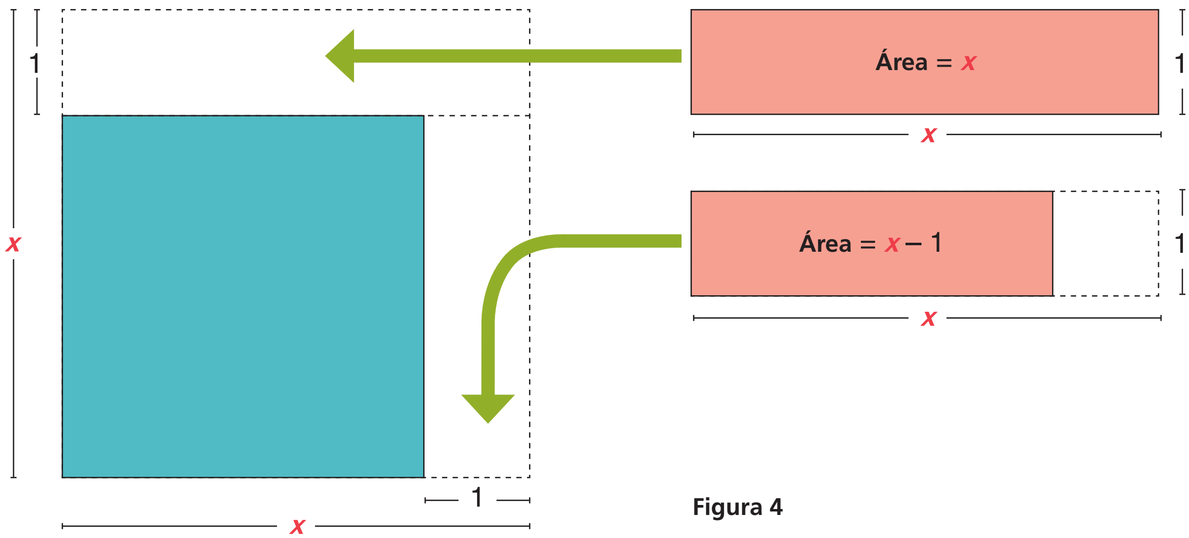


Figura 4

Después de completar el cuadrado de lado x, expresó que el área del cuadrado azul de la figura 3 era: $x^2 - x - (x - 1)$.

Ana, por su parte, usó tres bloques para cubrir el cuadrado de lado x; después expresó el área del cuadrado azul como $x^2 - 2(x - 1) - 1$.

a) Usen los bloques algebraicos de la derecha (de áreas $x - 1$ y 1) para completar el cuadrado de lado x como crean que lo hizo Ana; luego tracen cada bloque sobre la figura 5 e ilumínenlos de acuerdo a su color.

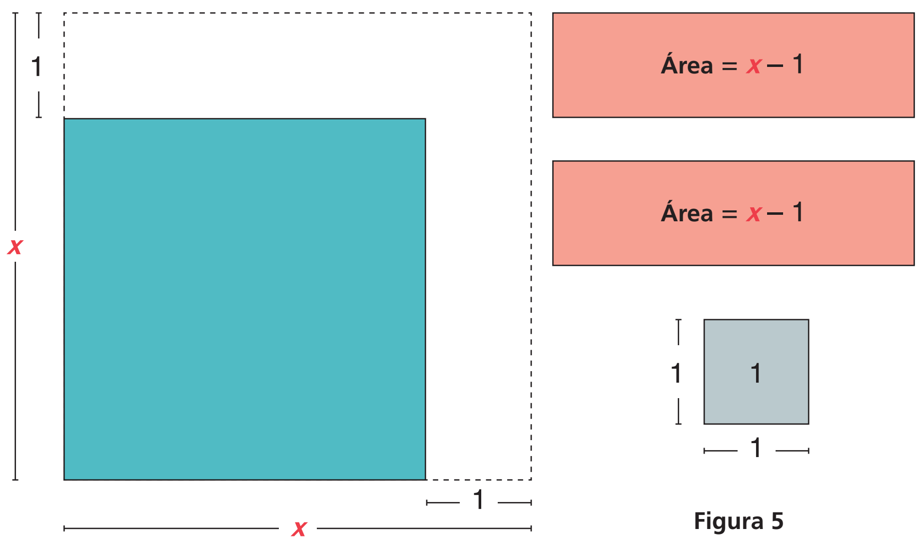


Figura 5

b) Completen la igualdad y simplifiquen ambas expresiones hasta obtener un trinomio.

Procedimiento de Ana:

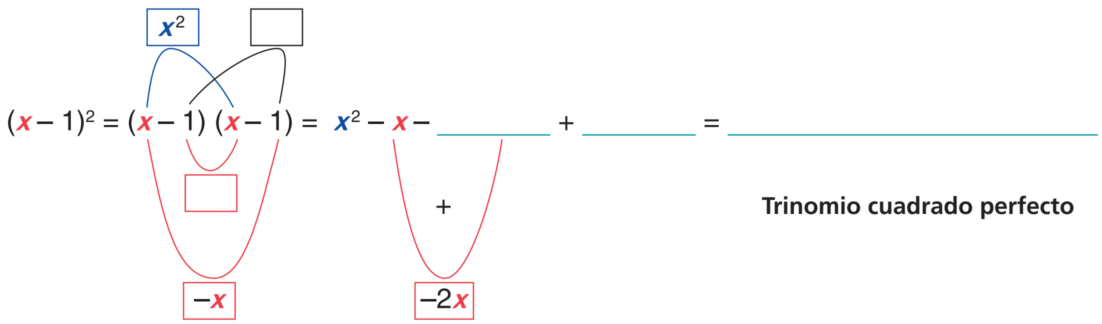
$A = (x - 1)^2 = x^2 - 2(x - 1) - 1 =$ ______________________ = ______________________

Procedimiento de Ricardo:

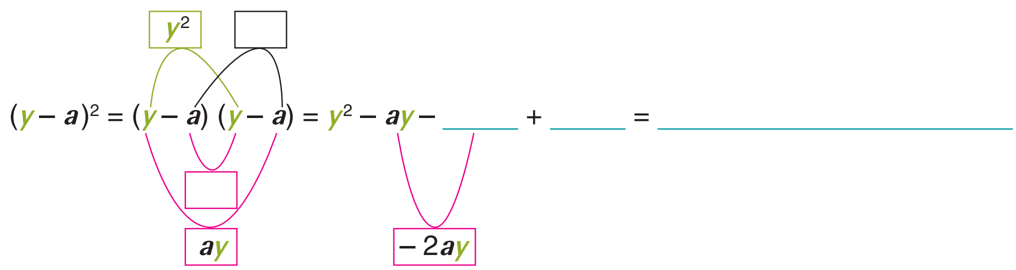
$A = (x - 1)^2 = x^2 - x - (x - 1) =$ ______________________ = ______________________

Los trinomios que obtuvieron en ambos procedimientos deben ser iguales. Si no resultaron así, revisen sus operaciones y corríjanlas hasta obtener el mismo trinomio cuadrado perfecto.

c) Otra manera de obtener el área del cuadrado azul de la figura 3 consiste en elevar al cuadrado el binomio $x - 1$. Háganlo y no olviden reducir los términos semejantes.



II. Otengan el resultado de $(y - a)^2$, para verificar si al elevar al cuadrado cualquier binomio que representa una diferencia se obtiene un trinomio cuadrado perfecto. No olviden sumar los términos semejantes.



¿Obtuvieron un trinomio cuadrado perfecto? ____________

Comparen sus soluciones y comenten cómo se puede obtener el trinomio cuadrado perfecto que corresponde al cuadrado de una diferencia, sin seguir el procedimiento de la actividad **II**.

>>> A lo que llegamos

Al elevar al cuadrado una diferencia también se obtiene un trinomio cuadrado perfecto, pero ahora el doble del producto de los términos del binomio tiene signo menos.

El siguiente procedimiento permite obtener el resultado de manera simplificada.

$\boxed{x \text{ se eleva al cuadrado}}$ $\boxed{b \text{ se eleva al cuadrado}}$

$$(x - b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$$

$\boxed{\text{El producto de } (x) \text{ y } (-b) \text{ se duplica}}$

Te recomendamos tomar en cuenta los dos aspectos siguientes:

a) El cuadrado de una diferencia puede expresarse como el cuadrado de una suma. Por ejemplo:

$$(x - 12)^2 = [x + (-12)]^2 = x^2 + 2(x)(-12) + (-12)^2$$
$$= x^2 - 24x + 144$$

b) Hay expresiones que parecen trinomios cuadrados perfectos pero no lo son, por ejemplo: $x^2 - 2x + 9$.

Como tiene dos términos que son cuadrados: x^2 y 9, podría suponerse que el trinomio es resultado de desarrollar $(x - 3)^2$, sin embargo $(x - 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 - 6x + 9$.

Recuerda que:

El producto de un número negativo elevado al cuadrado es positivo.

$(-12)^2 = (-12)(-12) = +144$

>>> Lo que aprendimos

1. Encuentra el cuadrado de los siguientes números aplicando la regla para elevar al cuadrado un binomio, tal como se muestra en los dos ejemplos.

$103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2(100)(3) + 2^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609$

$499^2 = (500 - 1)^2 = 500^2 + 2(500)(-1) + 1^2 = 250\,000 - 1\,000 + 1 = 249\,001$

a) $19^2 = (20 - 1)^2 = (\_\_\_\_)^2 - 2(\_\_\_\_)(\_\_\_\_) + (\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

b) $51^2 = (50 + 1)^2 = (\_\_\_\_)^2 + 2(\_\_\_\_)(\_\_\_\_) + (\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

c) $105^2 = (100 + 5)^2 = (\_\_\_\_)^2 + 2(\_\_\_\_)(\_\_\_\_) + (\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

d) $198^2 = (200 - 2)^2 = (\_\_\_\_)^2 - 2(\_\_\_\_)(\_\_\_\_) + (\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

e) $999^2 = (\_\_\_\_)^2 = (\_\_\_\_)^2 - 2(\_\_\_\_)(\_\_\_\_) + (\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

2. Escribe el binomio al cuadrado o el trinomio que falta en cada renglón. ¡Ten cuidado, hay un trinomio que no es cuadrado perfecto! Eleva al cuadrado los binomios que obtengas para verificar si corresponden al trinomio presentado en la columna izquierda de la tabla.

Binomio al cuadrado	Trinomio
$(x - 7)^2$	
$(2x + 1)^2$	
	$x^2 - 24x + 144$
$(x + 12)^2$	
	$x^2 - 14x + 9$
	$x^2 + 3x + 2.25$
$(x + \frac{1}{2})^2$	
	$4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$

a) Escribe el trinomio de la tabla que no es cuadrado perfecto: __________

b) ¿Por qué no es un trinomio cuadrado perfecto? __________

____

SESIÓN 3

LA DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS

>>> Para empezar

Dos binomios que sólo difieren en el signo de uno de sus términos se llaman *binomios conjugados*, por ejemplo $x + 3$ es el binomio conjugado de $x - 3$; $2x + 6$ es el binomio conjugado $-2x + 6$.

>>> Consideremos lo siguiente

A un cuadrado de área x^2 se le ha cortado en una de sus esquinas un cuadrado de área a^2 en una de sus esquinas, tal como se muestra en la figura 6.

La figura 6 se cortó por la línea punteada roja y con las dos piezas se formó el rectángulo de la figura 7.

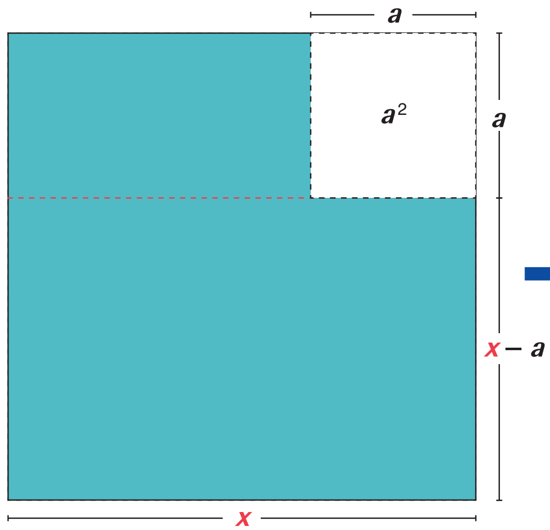


Figura 6

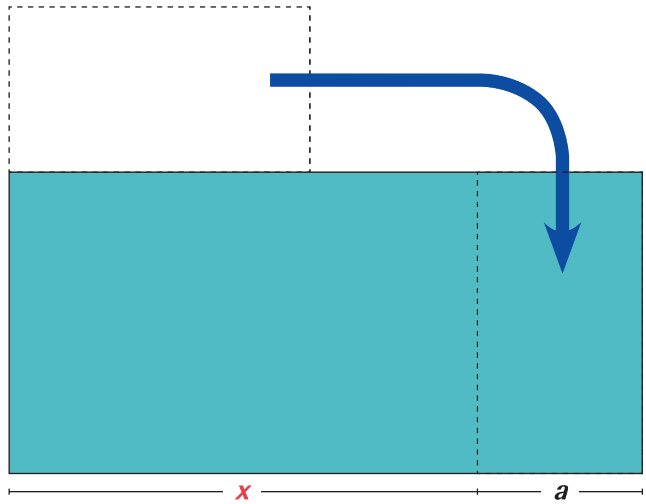


Figura 7

a) ¿Cuál es el área de la superficie azul de la figura 6? ________________

b) ¿Qué binomios tienes que multiplicar para obtener el área del rectángulo formado por las dos piezas en la figura 7?

Área = (__________) (__________)

c) Realiza la multiplicación término por término y suma los términos semejantes para obtener el área de la figura 7.

(__________) (__________) = ____________________

= ____________________

Comparen sus soluciones.

>>> Manos a la obra

I. Calquen en una hoja la figura 6, corten por la línea punteada y formen el rectángulo de la figura 7.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la medida de la base del rectángulo azul de la figura 7? ________________

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la medida de su altura? ________________

c) Expresen la diferencia de los cuadrados x^2 y a^2 como el producto de dos binomios conjugados.

$x^2 - a^2 =$ (________________) (________________)

d) Factoricen $16 - 9x^2$ como una diferencia de cuadrados.

$16 - 9x^2 =$ ( ) ( )

II. Realicen las siguientes multiplicaciones término por término y verifiquen si después de sumar los términos semejantes obtienen una diferencia de cuadrados.

$\boxed{4x^2}$ $\boxed{}$

a) $(2x + 3)\ (2x - 3) = 4x^2 - 6x +$ ________ $-$ ________ $=$ ____________________

$\boxed{}$

$\boxed{-\,6x}$

b) $(-2x + 3)\ (2x + 3) =$ ________________________ $=$ __________________

c) $(-2x - 3)\ (2x - 3) =$ ________________________ $=$ __________________

d) $(-2x + 3)\ (-2x - 3) =$ ________________________ $=$ __________________

e) ¿En qué casos se obtuvo una diferencia de cuadrados? ____________

f) ¿En qué casos no? ____________

Comenten como, a partir de una diferencia de cuadrados, podrían identificar los binomios conjugados que la producen al ser multiplicados.

>>> A lo que llegamos

El producto de dos binomios conjugados es una diferencia de cuadrados.

Binomios conjugados $\quad (x + y)\ (x - y) = x^2 - y^2 \quad$ **Diferencia de cuadrados**

La factorización de una diferencia de cuadrados son dos binomios conjugados.

La relación anterior puede aplicarse para multiplicar parejas de números,. Para ello, tienen que presentarlos como si fueran binomios conjugados. Ejemplos:

$$(102)\ (98) = (100 + 2)\ (100 - 2) = 10\,000 - 4 = 9\,996$$

$$(47)\ (53) = (50 - 3)\ (50 + 3) = 2\,500 - 9 = 2\,491$$

>>> Lo que aprendimos

1. Realiza las siguientes multiplicaciones. Expresa cada pareja de factores como binomios conjugados s y obtén el producto mediante una diferencia de cuadrados.

a) (21) (19) = ______________________ = ______________________ = ______________

b) (32) (28) = ______________________ = ______________________ = ______________

c) (97) (103) = ______________________ = ______________________ = ______________

d) (1 002) (998) = ______________________ = ______________________ = ______________

2. Completa la siguiente tabla escribiendo para cada pareja de binomios conjugados su respectiva diferencia de cuadrados y viceversa.

Binomios conjugados	Diferencia de cuadrados
$(x + 8)(x - 8)$	
$(2x + 3)(2x - 3)$	
	$x^2 - 100$
	$4x^2 - 25$
$(-3x + 2y)(3x + 2y)$	

A FORMAR RECTÁNGULOS

SESIÓN 4

>>> Para empezar

I. En la figura 8 se muestra un rectángulo formado con los bloques algebraicos.

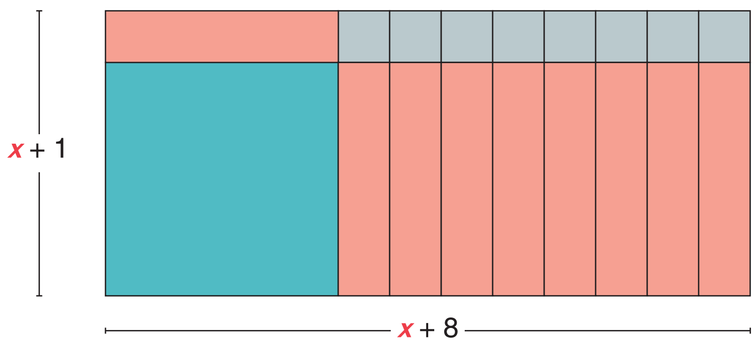


Figura 8

a) ¿Cuántos bloques de área x^2 se utilizaron? ____________

b) ¿Cuántos de área x? ____________

c) ¿Cuántos de área 1? ____________

d) ¿Cuál es su área? ____________

II. Con los bloques algebraicos apropiados x^2, x y 1 reproduce las figuras 9, 10 y 11 de tal manera que tengan el área indicada. Traza en cada caso los bloques que utilizaste para formarla y escribe la medida de su base y de su altura.

Área = $x^2 + 9x + 14$

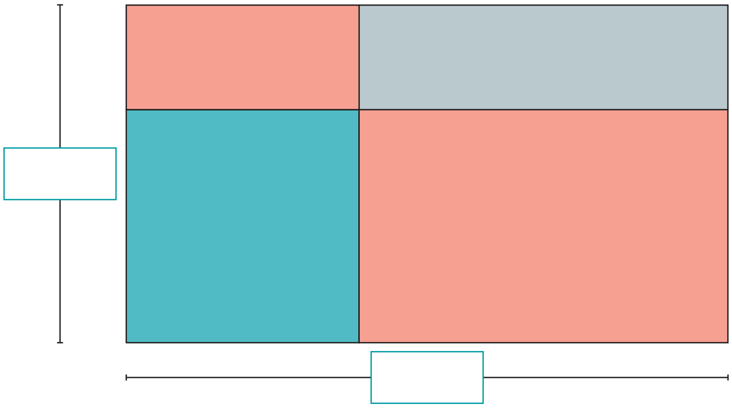


Figura 9

Área = $x^2 + 9x + 18$

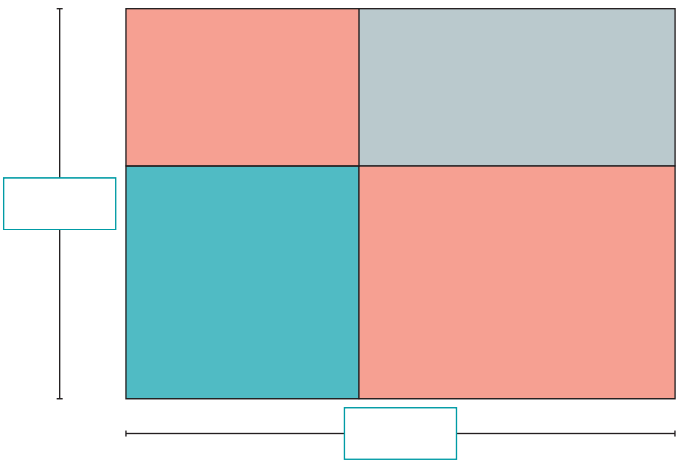


Figura 10

Área = $x^2 + 9x + 20$

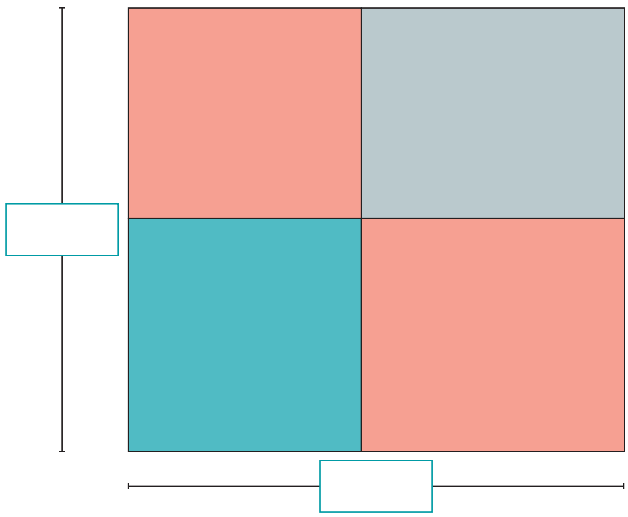


Figura 11

>>> Consideremos lo siguiente

Completa la tabla siguiente.

Primer factor (Medida de la base)	Segundo factor (Medida de la altura)	Producto (Área del rectángulo)
$x + 8$	$x + 1$	
$x + 7$	$x + 2$	
		$x^2 + 9x + 18$
$x + 5$	$x + 4$	
$x + 3$	$x + 2$	
		$x^2 + 5x + 4$

a) ¿Qué regla sigues para encontrar el producto si conoces los dos factores?

____

____

____

b) Si conoces el producto, ¿cómo obtienes los factores? ______________________

____

Comparen sus soluciones.

>>> Manos a la obra

I. En la figura 12, con bloques algebraicos se formó un rectángulo de base $x + 5$ y altura $x + 2$.

a) Observen la figura 12 y, sin hacer la multiplicación término por término, encuentren el producto de $(x + 5)(x + 2) =$ ______________________

b) ¿Cómo lo obtuvieron? ______________________

____

____

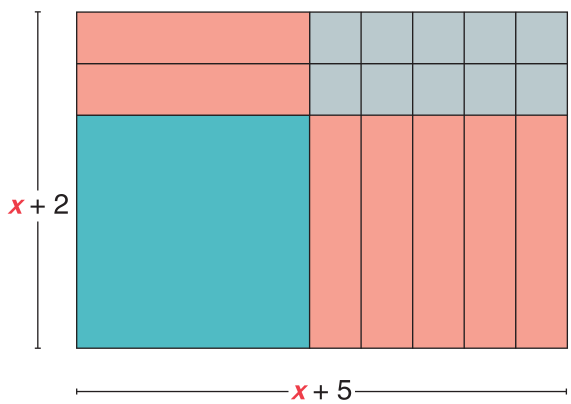


Figura 12

Los binomios $(x + 5)$ *y* $(x + 2)$ *tienen un término común que es* x. *Estos binomios se llaman binomios de término común.*

5 *y* 2 *son los términos NO comunes.*

c) Ahora realicen la multiplicación término por término.

$\boxed{x^2}$ $\boxed{}$

$$(x + 5)\,(x + 2) = x^2 + 2x + \underline{\qquad\quad} + 10 = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$\boxed{}$ $+$

$\boxed{2x}$ $\boxed{7x}$

d) ¿Qué operación hacen para obtener el término x^2? ____________________

e) ¿Qué operación hacen con los términos 5 y 2 de los binomios para obtener el coeficiente del término $7x$ del producto? ____________________

f) ¿Qué operación hacen con 5 y 2 para obtener el término 10?

____

g) Apliquen lo anterior para completar la igualdad.

$(x + 6)\,(x + 3) = x^2 +$ __________ $x +$ __________

Comparen sus soluciones y discutan cómo obtuvieron la regla para multiplicar dos binomios con término común.

>>> A lo que llegamos

Para obtener el producto de dos binomios con término común se puede hacer lo siguiente:

$$(x + 4)\,(x + 3) = x^2 + 7x + 12$$

1°. El término común x se eleva al cuadrado.

2°. Se suman los términos no comunes: $4 + 3 = 7$; el resultado 7 se multiplica por x.

3°. Se multiplican los términos no comunes: $(4)\,(3) = 12$

II. Apliquen la regla anterior para obtener el producto de $(x + 5)\,(x - 2)$:

a) ¿Cuánto obtienen al sumar $(+5) + (-2)$? __________

b) ¿Cuánto obtienen al multiplicar $(+5) + (-2)$? __________

c) Escriban el producto sin realizar la multiplicación término por término

$(x + 5)\,(x - 2) =$ ____________________

d) Ahora multipliquen término por término para verificar el resultado anterior.

$\boxed{x^2}$ $\boxed{}$

$(x + 5)\,(x - 2) = x^2 - 2x + \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$\boxed{}$

$\boxed{-2x}$

e) ¿Son iguales los productos obtenidos en los incisos c) y d)? __________

Comparen sus soluciones, discutan y verifiquen si la regla funciona par cualquier multiplicación de binomios con término común.

III. Al multiplicar dos binomios con término común se obtuvo:

$(\qquad\qquad)\,(\qquad\qquad) = y^2 + 10y + 16$

a) ¿Cuál es el término común? __________

b) ¿Qué números se multiplicaron para obtener 16? __________

c) ¿Cuánto deben sumar esos números? __________

d) Escriban en los paréntesis los factores que correspondan al trinomio $y^2 + 10y + 16$.

e) Multipliquen en su cuaderno los binomios término por término para verificar el resultado anterior.

Comparen sus soluciones y comenten qué operaciones tienen que realizar para encontrar el término común y los términos no comunes de los binomios.

>>> A lo que llegamos

Para factorizar el trinomio $x^2 + 5x + 4$, se puede hacer lo siguiente:

1º. Se obtiene el término común; en este caso es x, porque $(x)\,(x) = x^2$

$$x^2 + 5x + 4 = (x + \_\_\_\_\_\_)\,(x + \_\_\_\_\_\_)$$

2º. Se buscan parejas de números enteros que multiplicados den 4.

$(2)\,(2) = 4 \qquad (-2)\,(-2) = 4 \qquad (4)\,(1) = 4 \qquad (-4)\,(-1) = 4$

3. Se selecciona la pareja de números que sumada dé el coeficiente del término $5x$; en este caso, se seleccionan 4 y 1 porque $4 + 1 = 5$.

Por lo tanto:

$x^2 + 5x + 4 = (x + 4)\,(x + 1)$

>>> Lo que aprendimos

1. Aplica el producto de los binomios con término común en cada multiplicación.

a) (23) (25) = (20 + 3) (20 + 5) = 400 + (8) (20) + 15 = ______________

b) (105) (98) = (100 + 5) (100 - 2) = ______________

c) (48) (49) = ______________

2. Completa la tabla.

Binomios con término común	Trinomio de segundo grado
$(x + 8)\ (x + 2)$	
	$x^2 + 9x + 18$
	$x^2 - 3x - 10$
	$x^2 + 3x + 2$
	$x^2 - 3x + 2$
$(x + a)\ (x + b)$	

SESIÓN 5

UN CASO ESPECIAL DE FACTORIZACIÓN

>>> Consideremos lo siguiente

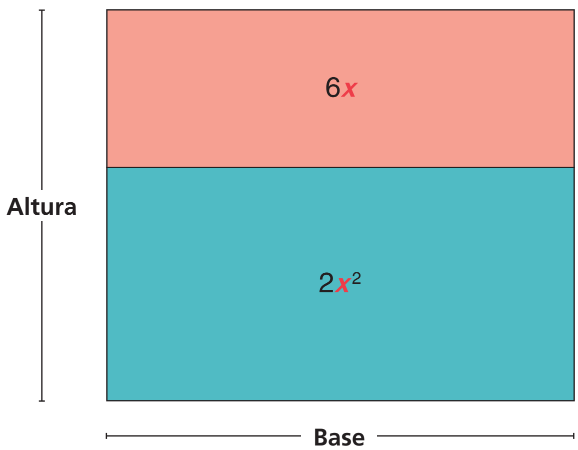


Figura 13

No siempre ocurre que el área de un rectángulo corresponda a un trinomio. Por ejemplo, en la figura 13 se representa un rectángulo de área $2x^2 + 6x$.

a) ¿Cuál es la medida de la base?

____

b) ¿Cuál es la medida de la altura?

____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Sobre la figura 13, tracen dos bloques de área x^2 y seis de área x. Después, completen la tabla siguiente:

Rectángulo	Área	(Base) (Altura)
Azul	$2x^2$	$(2x)$ ( )
Rojo	$6x$	$(2x)$ ( )
Completo	$2x^2 + 6x$	$(2x)$ ( )

Como el factor $2x$ aparece en las tres multiplicaciones de la última columna, es un factor común de los términos $2x^2$ y $6x$.

¿Son iguales las expresiones que representan las medidas de las alturas de los rectángulos azul y rojo? ____________

Estas expresiones se llaman *factores no comunes* de los términos $2x^2$ y $6x$.

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Qué otros factores comunes pueden tener los términos $2x^2$ y $6x$?

b) ¿Pueden formarse rectángulos diferentes al de figura 13, con dos bloques de área x^2 y seis de área x? Dibújenlos en el pizarrón y expresen su área $2x^2 + 6x$ por medio de dos factores.

>>> A lo que llegamos

Para factorizar un binomio tal como $4x^2 + 20x$ se puede hacer lo siguiente:

1°. Se factoriza cada término del binomio de manera que el factor común contenga la literal y el máximo valor posible del coeficiente:

$$4x^2 = (4x)(x)$$

$$20x = (4x)(5)$$

2°. Se expresa la factorización:

$$4x^2 + 20x = (4x)(x + 5)$$

II. Apliquen la regla anterior para factorizar $14x^2y - 21xy^2$

$14x^2y = (7xy)$ (______)

$-21xy^2 = (7xy)$ (______)

$14xy^2 - 21xy^2 = (7xy)$ (______ – ______)

Comparen sus soluciones, discutan y verifiquen si la regla funciona para factorizar cualquier tipo de polinomios.

>>> Lo que aprendimos

1. Expresa los siguientes polinomios como el producto de dos factores.

a) $x^2 - 18x + 81 =$ (________) (________)

b) $x^2 + 20x + 100 =$ (________) (________)

c) $x^2 - 400 =$ (________) (________)

d) $x^2 + 8x - 20 =$ (________) (________)

e) $4x^2 + 8x =$ (________) (________)

f) $x^2 + 11x + 24 =$ (________) (________)

g) $x^2 + 10x + 24 =$ (________) (________)

h) $x^2 + 14x + 24 =$ (________) (________)

i) $x^2 + 2x - 24 =$ (________) (________)

j) $9x^2 - 36x =$ (________) (________)

2. Factorizando podría establecerse una regla útil para calcular el producto de ciertos números; examina las siguientes multiplicaciones y trata de encontrar la relación entre los factores involucrados y el resultado. ¿Se puede establecer una regla general?

$(12)\,(18) = 216$ $(23)\,(27) = 621$ $(31)\,(39) = 1\,209$ $(54)\,(56) = 3\,024$

a) ¿Qué relación matemática encuentras entre las cifras de las unidades de los factores? ________________________________

b) ¿Cómo obtienes el número formado por las dos cifras de la derecha del producto?

____

____

c) ¿Cómo obtienes el número formado por las demás cifras de la izquierda del producto? ______________________________

____

d) Si ya descubriste la regla, calcula mentalmente el resultado de cada operación.

(13) (17) = ________ (43) (47) = ________ (61) (69) = ________

(74) (76) = ________ (88) (82) = ________ (191) (199) = ________

>>> Para saber más

Sobre productos notables y factorización, consulta:
http://interactiva.matem.unam.mx
Ruta1: Álgebra → Una embarrada de álgebra → Binomio al cuadrado
Ruta1: Álgebra → Una embarrada de álgebra → Diferencia de cuadrados
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora (PUEMAC), UNAM.

SECUENCIA 2

Triángulos congruentes y cuadriláteros

En esta secuencia aplicarás criterios de congruencia para la justificación de propiedades sobre los cuadriláteros.

LADOS OPUESTOS IGUALES

SESIÓN 1

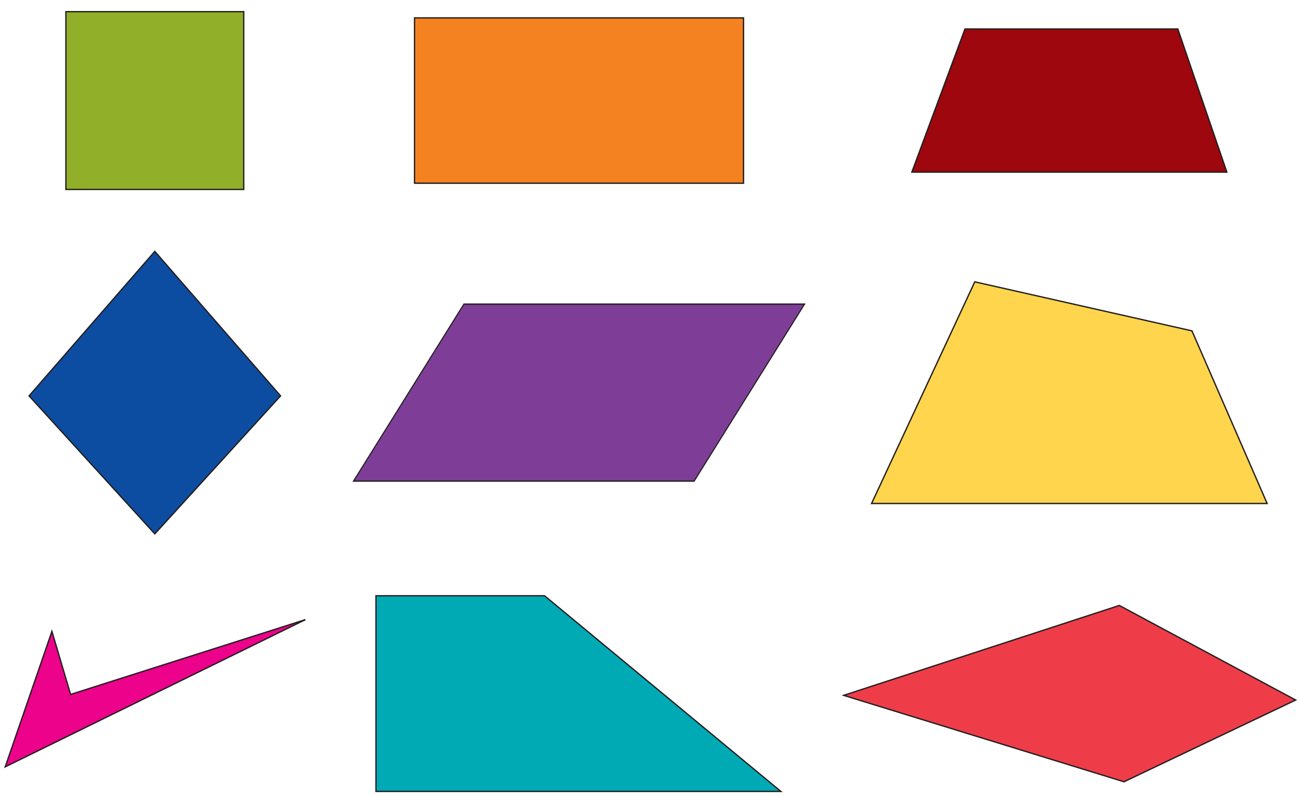
>>> Para empezar

A lo largo de la historia se han hecho afirmaciones matemáticas que por mucho tiempo se creyeron ciertas, luego fueron reconocidas como erróneas. Para evitarlo, los matemáticos exigieron que las afirmaciones matemáticas tuvieran una prueba rigurosa, es decir, una justificación que no deje lugar a dudas.

En esta sesión conocerás una de estas justificaciones rigurosas en la geometría.

>>> Consideremos lo siguiente

Observen los siguientes cuadriláteros, escojan cuáles tienen sus lados opuestos iguales.



De las siguientes propiedades, ¿cuál tienen en común los cuadriláteros que eligieron?

a) Sus cuatro lados son iguales.

b) Cualesquiera de sus lados opuestos son paralelos.

c) Sus cuatro ángulos son iguales.

d) Sus diagonales son perpendiculares.

Dibujen dos cuadriláteros que satisfagan la propiedad que eligieron anteriormente y verifiquen si cualesquiera de sus lados opuestos son iguales.

Comparen sus respuestas y comenten:

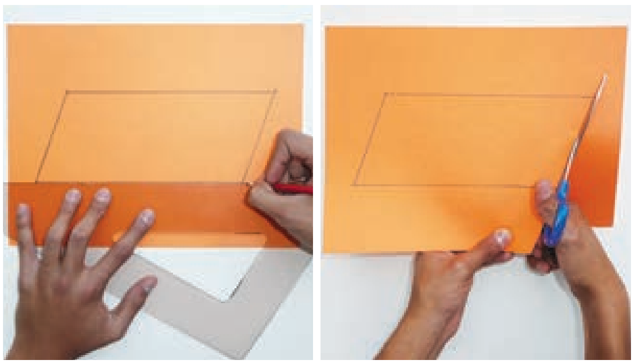
¿Qué diferencia hay entre que un cuadrilátero sea paralelogramo y que tenga sus pares de lados opuestos paralelos?

¿Será cierta la siguiente afirmación? Todos los paralelogramos tienen sus pares de lados opuestos iguales.

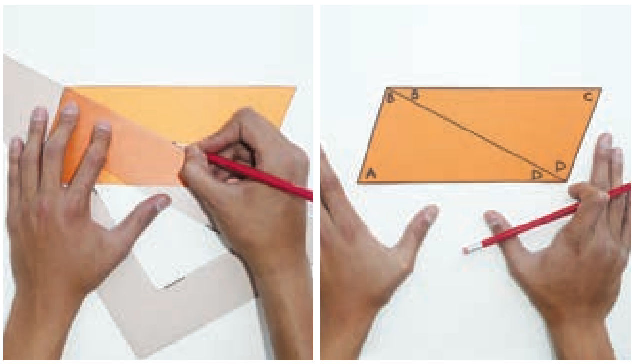
>>> Manos a la obra

I. Realicen la siguiente actividad.

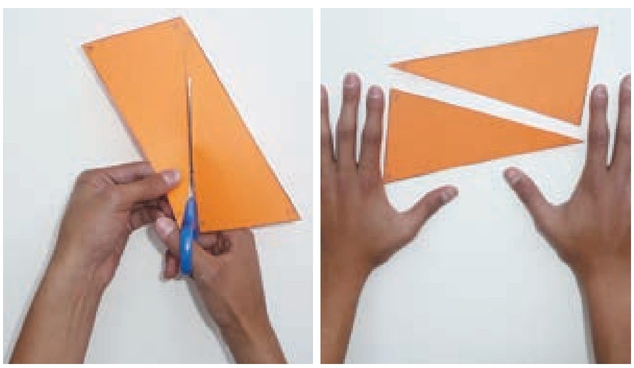
Paso 1. Dibujen en un papel un paralelogramo y recórtenlo.



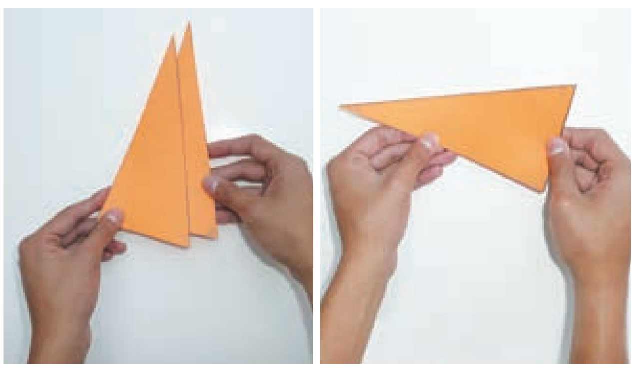
Paso 2. Después tracen una diagonal y anoten los nombres a los vértices del paralelogramo tal como se muestra.



Paso 3. Recorten los dos triángulos por la diagonal.



Paso 4. Pongan un triángulo encima del otro hasta que parezcan uno solo.



Recuerden que:

Dos triángulos son congruentes si se pueden hacer corresponder sus lados y ángulos de tal manera que lados y ángulos correspondientes midan lo mismo.

a) ¿Qué lado quedó sobrepuesto con el lado **AB**? ____________

b) ¿Qué lado quedó sobrepuesto con el lado **BD**? ____________

c) ¿Qué lado quedó sobrepuesto con el lado **DA**? ____________

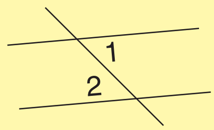
Comparen sus respuestas y comenten:

¿Son congruentes △**ABD** y △**CDB**?

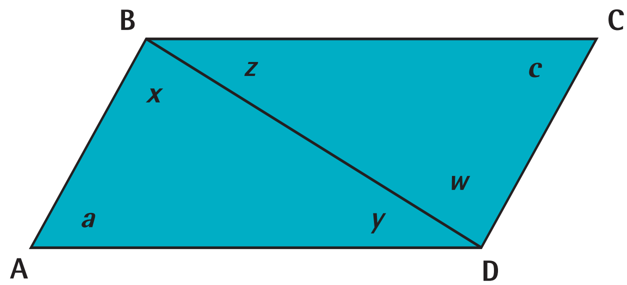
II. Resuelvan las siguientes actividades para justificar que los triángulos **ABD** y **CDB** son congruentes.

Recuerden que:

Los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales.



$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$



a) De los ángulos marcados en la figura, ¿cuáles son alternos internos? (Por lo tanto iguales).

____________ = ____________ y ____________ = ____________

b) De los siguientes criterios de congruencia, ¿cuál usarían para justificar que los triángulos **ABD** y **CDB** son congruentes? Justifiquen su respuesta.

____

____

i) LLL (lado, lado, lado) ii) LAL (lado, ángulo, lado) iii) ALA (ángulo, lado, ángulo)

c) Algunas de las siguientes afirmaciones son consecuencia de que los triángulos **ABD** y **CDB** son congruentes, ¿cuáles son?

i) Los tres lados del △**ABD** son iguales y respectivamente los del △**CBD**.

ii) Los lados del △**ABD** son iguales a los correspondientes del △**CDB**.

iii) $\overline{\mathbf{BD}}$ es igual al lado $\overline{\mathbf{CB}}$.

iv) $\overline{\mathbf{AD}}$ es igual al lado $\overline{\mathbf{BC}}$.

v) $\overline{\mathbf{AB}}$ es igual al lado $\overline{\mathbf{CB}}$.

III. Expliquen cómo a partir de que los triángulos **ABD** y **CBD** son congruentes se puede afirmar que los lados opuestos del paralelogramo son iguales.

Comparen sus respuestas y comenten:

Además de los paralelogramos, ¿habrá otros cuadriláteros con lados opuestos son iguales?

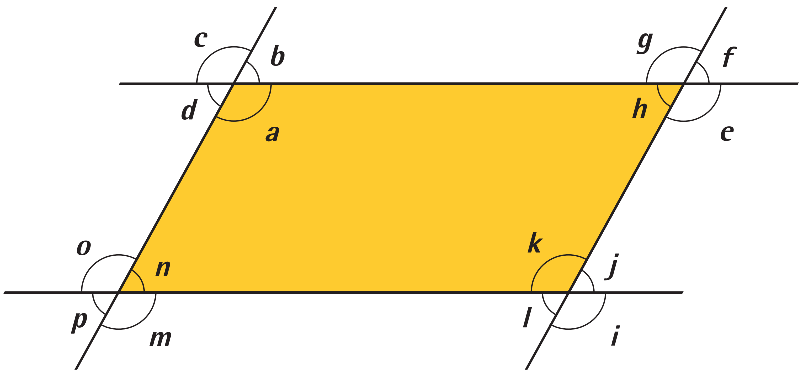
>>> A lo que llegamos

Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales, pues si se traza una de sus diagonales, se obtienen dos triángulos congruentes.

>>> Lo que aprendimos

La siguiente figura tiene marcados con diferentes letras algunos de los ángulos que en ella aparecen. Usa las etiquetas de esta figura para completar la justificación a la siguiente afirmación:

En un paralelogramo, ángulos opuestos son iguales.



Justificación:

*Los ángulos **a** y _____ son opuestos en el paralelogramo. Para justificar que son iguales, observemos que ∡**a** es igual a ∡ _____ pues son ángulos correspondientes (respecto a las dos paralelas horizontales y la transversal de la izquierda, ver figura). Luego ∡ _____ es igual a ∡**k** pues son ángulos alternos internos (respecto a las dos paralelas no horizontales y la transversal definida por la base del paralelogramo, ver figura). Lo cual muestra que los ángulos opuestos ∡ _____ y ∡**k** son iguales pues ambos son iguales a ∡ _____.*

De manera similar se puede justificar que los otros ángulos opuestos _____ y _____ son iguales.

Comparen sus respuestas.

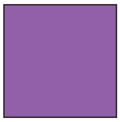
SESIÓN 2

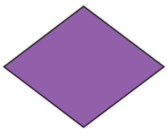
PUNTOS MEDIOS

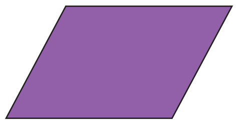
>>> Para empezar

En geometría existen muchos cuadriláteros y se clasifican en varios tipos, tales como cuadrados, rectángulos y paralelogramos. Estos tipos no son excluyentes, es decir, un mismo cuadrilátero puede ser de dos o más tipos. Por ejemplo, un cuadrado es a la vez un rectángulo, un trapecio y un paralelogramo.

Describe a qué tipos pertenecen cada uno de los siguientes cuadriláteros:

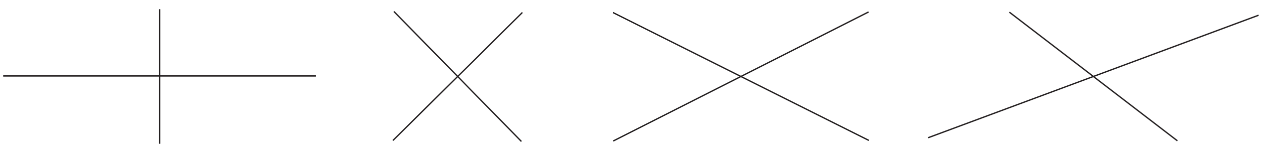






>>> Consideremos lo siguiente

Los siguientes pares de segmentos se intersecan en su punto medio. Unan los extremos de los segmentos, para formar cuadriláteros, y después contesten lo que se les pide.



¿Cuáles de los siguientes tipos de cuadrilátero aparecieron? Márquenlos con una ✓.

☐ Cuadrado ☐ Rectángulo ☐ Trapecio ☐ Paralelogramo ☐ Rombo

Los cuatro cuadriláteros que se formaron son todos de un mismo tipo. ¿Cuál es? Márquenlo con una ✓.

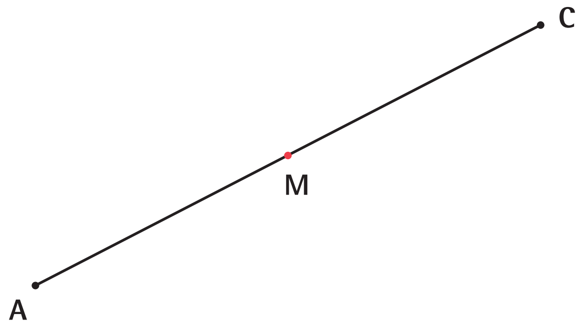
☐ Cuadrado ☐ Rectángulo ☐ Trapecio ☐ Paralelogramo ☐ Rombo

Cada uno dibuje otro par de rectas que se intersequen en su punto medio. Unan los extremos de los segmentos para formar un cuadrilátero y decidan si éste es del mismo tipo que el que marcaron en la pregunta anterior.

Comparen sus respuestas y comenten si siempre se formará un paralelogramo al unir los extremos de dos segmentos que se intersequen por su punto medio.

>>> Manos a la obra

I. En el segmento con extremos **A** y **C** se ha marcado el punto medio **M** con rojo. Dibuja otro segmento cuyo punto medio coincida con el punto **M** y etiqueta sus extremos con las letras **B** y **D**. Después traza los segmentos **AB**, **BC**, **CD** y **DA**.



a) Agrupa los segmentos **AM**, **BM**, **CM** y **DM** en parejas de segmentos iguales y justifica por qué son iguales.

_________ = _________ . Justificación: ____________________________

y

_________ = _________ . Justificación: ____________________________

b) Agrupa los ángulos **AMB**, **BMC**, **CMD** y **DMA** en parejas de ángulos iguales y justifica por qué son iguales.

_________ = _________ . Justificación: ____________________________

y

_________ = _________ . Justificación: ____________________________

II. De los siguientes criterios de congruencia, ¿cuál usarías para justificar que los triángulos **AMB** y **CMD** son congruentes?

i) LLL ii) LAL iii) ALA

Explica por qué los otros dos criterios no funcionan:

____

____

____

III. Como los triángulos **AMB** y **CMD** son congruentes, se pueden escribir algunas igualdades de lados y ángulos. Relaciona las siguientes dos columnas uniendo con una línea los elementos que tienen la misma magnitud.

$\overline{AM}$	$\overline{CM}$
$\overline{MB}$	$\overline{DC}$
$\overline{BA}$	$\measuredangle MDC$
$\measuredangle AMB$	$\measuredangle DCM$
$\measuredangle MBA$	$\overline{MD}$
$\measuredangle BAM$	$\measuredangle CMD$

IV. De las igualdades anteriores, ¿cuál crees que te sirva para argumentar que los segmentos **AB** y **CD** son paralelos?

_________ = _________

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cómo podrían argumentar que los lados **AD** y **BC** son paralelos?

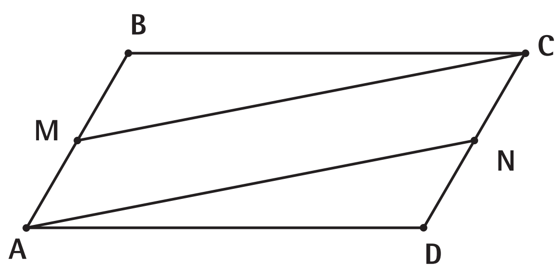
>>> A lo que llegamos

Si un cuadrilátero satisface que sus diagonales se intersecan en su punto medio, entonces este cuadrilátero debe ser un paralelogramo. Para justificar esta propiedad de manera formal se pueden emplear los criterios de congruencia.

>>> Lo que aprendimos

Elige algunos de los textos que están en el recuadro de razones para completar la justificación del siguiente hecho geométrico.

*Sean **M** y N los puntos medios de los lados **AB** y **CD** del paralelogramo **ABCD**, respectivamente. Entonces, se satisface que los triángulos **MBC** y **NDA** son congruentes.*



Razones
• En un paralelogramo los lados opuestos son iguales. • En un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales. • En un paralelogramo los ángulos adyacentes son complementarios. • Son la mitad de lados iguales. • Es un paralelogramo. • Ángulos alternos internos entre paralelas son iguales. • Son congruentes por el criterio de lado, ángulo, lado. • Son congruentes por el criterio de lado, lado, lado. • Son congruentes por el criterio de ángulo, lado, ángulo.

Justificación

Afirmación	Razón
$\overline{AB} = \overline{CD}$	
$\overline{MB} = \overline{ND}$	
$\overline{BC} = \overline{AD}$	
$\measuredangle ABC = \measuredangle CDA$	
$\triangle MBC$ es congruente con $\triangle NDA$	

>>> Para saber más

Sobre la justificación de los hechos geométricos en la historia, consulta:
Ruiz, Concepción y Sergio de Régules. "Geometría práctica y geometría deductiva" en *Crónicas geométricas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

SECUENCIA 3

Entre rectas y circunferencias

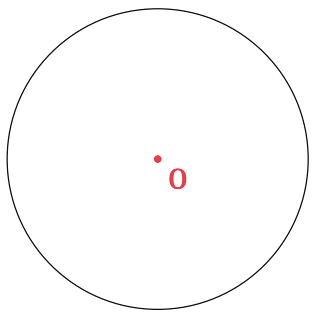
En esta secuencia identificarás las posiciones relativas entre una recta y una circunferencia y entre circunferencias. Conocerás algunas propiedades de las rectas secante y tangente de una circunferencia.

SESIÓN 1

PUNTOS EN COMÚN

>>> Para empezar

I. La circunferencia de centro **O** mide 2 cm de radio. Traza las rectas que se piden.



a) Una recta ***e*** que no interseque a la circunferencia.

b) Una recta ***s*** que interseque a la circunferencia en dos puntos.

c) Una recta ***t*** que interseque a la circunferencia en sólo un punto.

d) Una recta ***d*** que pase por el centro de la circunferencia.

Comparen sus trazos y verifiquen si cumplen con las condicione pedidas.

II. Mide las distancias de cada una de las rectas al centro de la circunferencia.

Recuerda que:

La distancia de un punto a una recta es la medida de la longitud del segmento perpendicular del punto a la recta.

a) ¿Para cuál de las rectas la distancia es cero? ____________

b) ¿Para cuál de las rectas la distancia es 2 cm? ____________

c) ¿Para cuál de las rectas la distancia es mayor que 2 cm? ____________

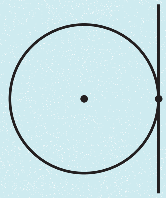
d) ¿Para cuál de las rectas la distancia es menor que 2 cm? ____________

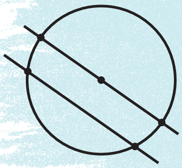
Comparen y justifiquen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

En el plano, una recta puede intersecar a una circunferencia en un punto, intersecarla en dos puntos o no intersecarla.

Las rectas que intersecan a la circunferencia en un solo punto se llaman rectas tangentes a la circunferencia. Al punto en el que la tangente interseca a la circunferencia se llama punto de tangencia. La distancia que hay del centro a la recta tangente es igual al radio.





Las rectas que intersecan en dos puntos a la circunferencia se llaman rectas secantes. La distancia del centro de la circunferencia a la recta secante es menor que el radio.

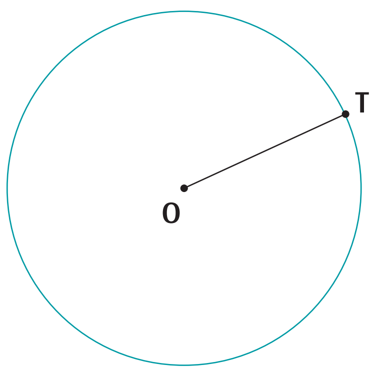
Las rectas que no intersecan a la circunferencia se llaman rectas exteriores. La distancia del centro de la circunferencia a la recta exterior es mayor que el radio.

TRAZOS DE TANGENTES

SESIÓN 2

>>> Consideremos lo siguiente

Tracen una recta perpendicular al segmento **OT** por el punto **T**.



¿La recta que trazaron es exterior, tangente o secante a la circunferencia? ____________

Justifiquen su respuesta. ____

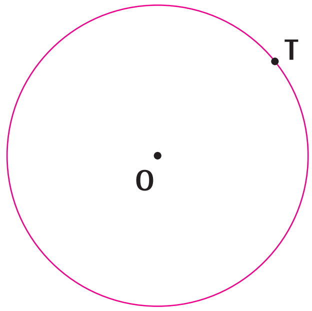
____

____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Traza una recta secante a la circunferencia que pase por el punto **T** y que no pase por **O**.



a) Llama **S** al otro punto en el que la secante corte a la circunferencia y une los puntos para formar el triángulo **OTS**. Este triángulo es isósceles, ¿por qué?

____

b) Marca con rojo los ángulos iguales del triángulo **OTS**, ¿los ángulos que marcaste miden 90°? ______________

c) ¿La recta secante que trazaste es perpendicular a $\overline{OT}$? _____ . ¿Por qué? _______

____

d) Traza otras rectas secantes a la circunferencia por **T**. ¿Alguna de las rectas que trazaste es perpendicular a $\overline{OT}$? _____

e) ¿Crees que se pueda trazar una recta secante por el punto **T** de manera que forme un ángulo de 90° con $\overline{OT}$? _____

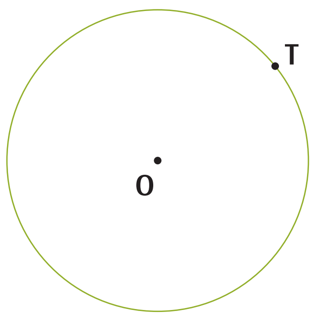
Justifica tu respuesta ____

____

Recuerda que:

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo suman 180°.

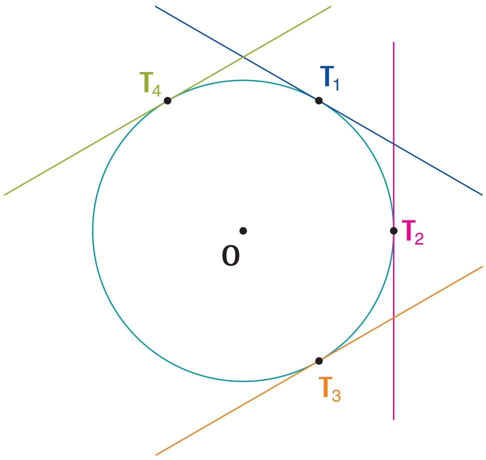
II. Traza una recta exterior a la circunferencia que pase por el punto **T**.



¿Pudiste trazar la recta? _____ . ¿Por qué? ______________________________

____

III. En la circunferencia se trazaron cuatro rectas tangentes.



Traza los radios OT_1, OT_2, OT_3 y OT_4. Mide con tu transportador el ángulo que forma cada tangente con el radio por el punto de tangencia.

a) ¿Cuánto miden los ángulos formados por la recta tangente en T_1 y el radio OT_1?

____

b) ¿Cuánto miden los ángulos formados por la recta tangente en T_2 y el radio OT_2?

____

c) ¿Cuánto miden los ángulos formados por la recta tangente en T_3 y el radio OT_3?

____

d) ¿Cuánto miden los ángulos formados por la recta tangente en T_4 y el radio OT_4?

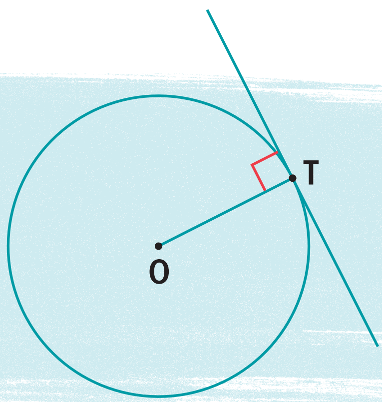
____

Esta propiedad que observaste con estas rectas tangentes se cumple para cualquier recta tangente.

Comparen sus respuestas. Regresen al apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen su respuesta y su justificación.

>>> A lo que llegamos

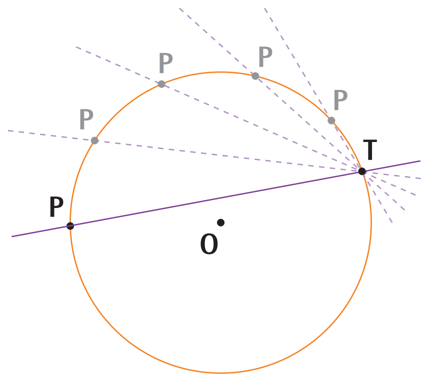
Sea **T** un punto sobre una circunferencia de centro **O**. La **recta perpendicular al radio OT** por el punto **T** es la **recta tangente** a la circunferencia por el punto **T**.



>>> Lo que aprendimos

1. En la circunferencia se trazó la secante **TP**.

La recta secante se fija en el punto **T** y se gira de manera que el punto de corte **P** se vaya acercando a **T**.



a) ¿Qué pasa con la recta secante cuando el punto **P** coincide con el punto **T**?

____

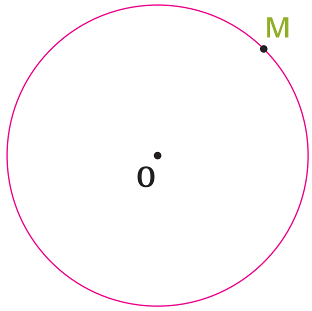
Justifica tu respuesta. ________________________________

____

b) ¿Qué pasa con la medida del ángulo entre el radio y la recta secante?

____

2. Traza una recta tangente a la circunferencia por el punto **M**.



Describe tu procedimiento. ________________________________

____

____

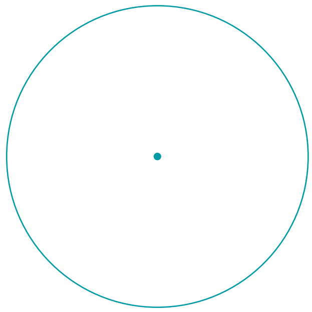
Justifica que la recta que obtuviste con ese procedimiento es una recta tangente.

____

____

____

3. Traza un cuadrado que inscriba al círculo dado. Es decir, que cada uno de sus lados sea una recta tangente de la circunferencia.



Si el radio del círculo mide 2 cm, ¿cuánto mide el lado del cuadrado? ____________

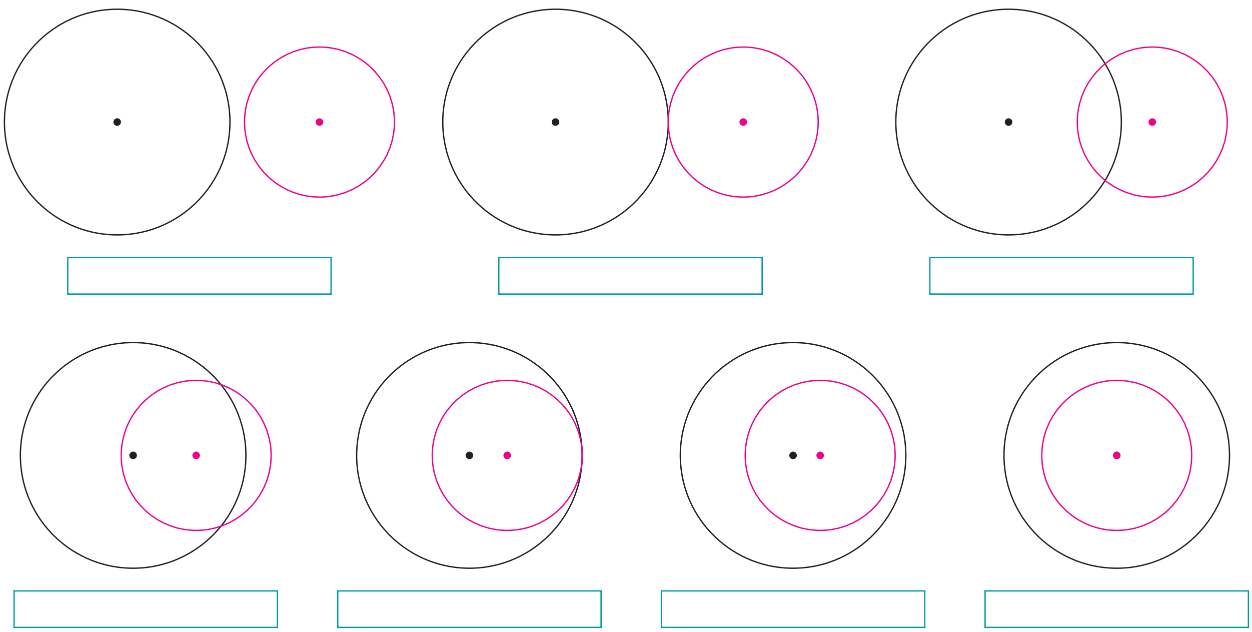
ENTRE CIRCUNFERENCIAS

SESIÓN 3

>>> Para empezar

I. En la siguiente sucesión de imágenes, la circunferencia pequeña se va acercando a la circunferencia grande.

a) Observa las posiciones sucesivas que adquieren las dos circunferencias.



b) De los siguientes nombres, elije el que corresponda a cada una de las posiciones de las circunferencias y anótalo en el recuadro.

1 Circunferencias tangentes externas

2 Circunferencias ajenas internas

3 Circunferencias secantes

4 Circunferencias concéntricas

5 Circunferencias ajenas externas

6 Circunferencias tangentes internas

Comparen sus respuestas.

II. Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántos puntos en común tienen dos circunferencias concéntricas? ____________

b) ¿Cuántos puntos en común tienen dos circunferencias ajenas? ____________

c) ¿Cuántos puntos en común tienen dos circunferencias tangentes? ____________

d) ¿Cuántos puntos en común tienen dos circunferencias secantes? ____________

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Qué diferencia hay entre circunferencias ajenas externas y circunferencias ajenas internas? ¿Qué diferencia hay entre circunferencias tangentes externas y circunferencias tangentes internas?

>>> A lo que llegamos

Dos circunferencias pueden ser:

Ajenas, cuando no tienen puntos en común. Estas circunferencias pueden ser **externas** o **internas**. Un caso particular de éstas son las **circunferencias concéntricas** cuya característica es que tienen el mismo centro.

Tangentes, cuando tienen un solo punto en común. Estas circunferencias pueden ser **externas** o **internas**.

Secantes, cuando tienen dos puntos en común.

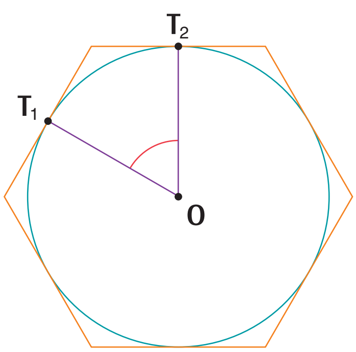
SESIÓN 4

ALGUNOS PROBLEMAS

>>> Lo que aprendimos

Resuelve los problemas de esta sesión sin utilizar transportador.

1. La circunferencia de centro **O** está inscrita en un hexágono regular. T_1 y T_2 son puntos de tangencia.



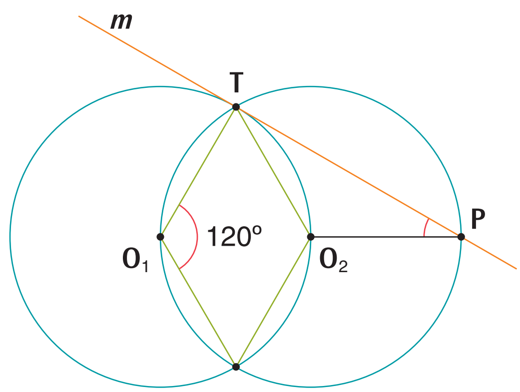
a) ¿Cuánto miden los ángulos internos de un hexágono regular? ____________

b) ¿Cuánto miden los ángulos formados por una tangente y el radio trazado al punto de tangencia? ____________

c) ¿Cuánto suman los ángulos internos de un cuadrilátero? ____________

d) ¿Cuánto mide $\measuredangle T_1 O T_2$? ____________

2. Las circunferencias con centros $\mathbf{O_1}$ y $\mathbf{O_2}$ tienen radios iguales y cada una pasa por el centro de la otra. La recta ***m*** es tangente en **T** a la circunferencia con centro $\mathbf{O_1}$ y es secante a la circunferencia con centro en $\mathbf{O_2}$. Además, los puntos $\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$ y **P** son colineales.



¿Qué tipo de triángulo es el $\mathbf{PO_1T}$? ____________

¿Cuánto mide el ángulo $\mathbf{TO_1P}$? ____________

¿Cuánto mide $\measuredangle \mathbf{TPO_2}$? ____________

Justifica tu respuesta. ____

3. Sean $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$ circunferencias con centros $\mathbf{O_1}$ y $\mathbf{O_2}$, respectivamente, tangentes en **T**. Traza la recta tangente a la circunferencia $\mathbf{C_1}$ por **T** y la tangente a $\mathbf{C_2}$ por **T**.

Toma en cuenta que en las circunferencias tangentes se cumple que la recta determinada por los centros pasa por el punto de tangencia de las circunferencias.

¿Qué tienen en común las rectas tangentes que trazaste? ____________________

Justifica tu respuesta. ____

Ahora sabes que una recta y una circunferencia pueden tener distintas posiciones entre sí. Además conociste algunas propiedades que permiten resolver diversos problemas.

>>> Para saber más

Sobre la construcción de una recta tangente a una circunferencia y de circunferencias tangentes, consulta:
http://www.educacionplastica.net/tangen.htm
Ruta 1: Construcción paso a paso
Ruta 2: Ejercicios para practicar la construcción
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].

Ángulos en una circunferencia

En esta secuencia determinarás la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco.

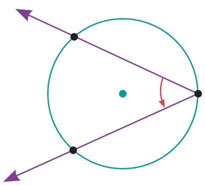
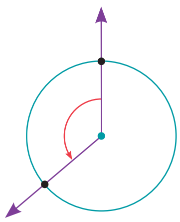
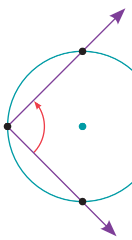
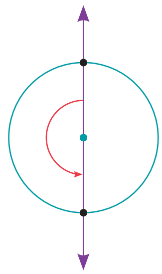
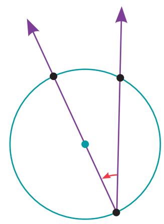
SESIÓN 1

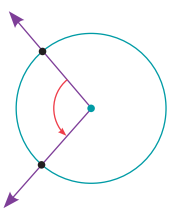
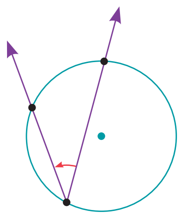
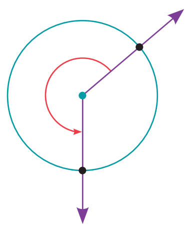
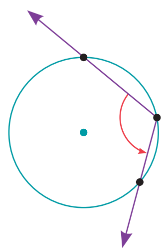
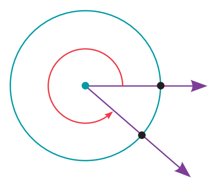
DOS ÁNGULOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

>>> Para empezar

I. Un ángulo en una circunferencia se clasifica según su vértice esté sobre la circunferencia o coincida con el centro de la circunferencia. En el primer caso, se trata de *ángulos inscritos*; en el segundo, de *ángulos centrales*.

Anota en cada ángulo "ángulo central" o "ángulo inscrito" segun corresponda.

Comparen sus respuestas.

II. Dibuja los ángulos que se piden o explica por qué no es posible dibujarlos.

a) Un ángulo central tal que uno de sus lados sea una tangente.

b) Un ángulo inscrito tal que uno de sus lados sea un diámetro.

c) Un ángulo central que mida 90°.

d) Un ángulo inscrito tal que su vértice esté fuera de la circunferencia.

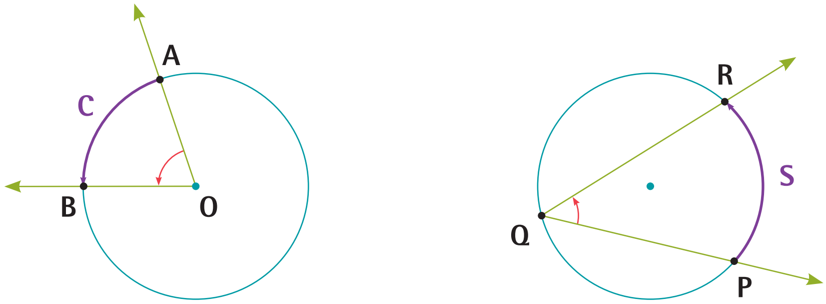
Comparen sus dibujos y verifiquen que cumplen con las condiciones pedidas.

SESIÓN 2

RELACIONES A MEDIAS

>>> Para empezar

Los lados de cualquier ángulo en una circunferencia, inscrito o central, determinan un arco en la circunferencia. En estas circunferencias el arco determinado por los ángulos dados está marcado con morado. Se dice que los arcos son *subtendidos* por los ángulos que los determinan.



El arco **C** es subtendido por el ∡**AOB**; el arco **S** es subtendido por el ∡**PQR**.

En cada circunferencia marquen con azul el arco que subtienden los ángulos centrales y con rosa el arco que subtienden los ángulos inscritos.

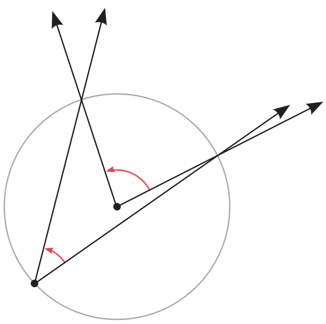


Figura 1

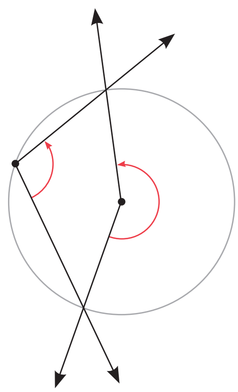


Figura 2

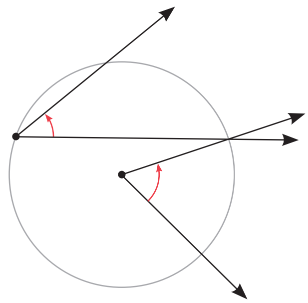


Figura 3

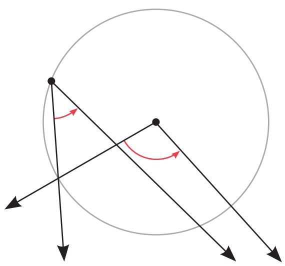


Figura 4

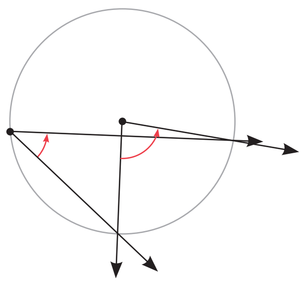


Figura 5

¿En qué circunferencias se cumple que el ángulo central subtiende el mismo arco que el ángulo inscrito? ____

>>> Consideremos lo siguiente

Midan con su transportador los ángulos centrales y los ángulos inscritos y anoten los datos obtenidos.

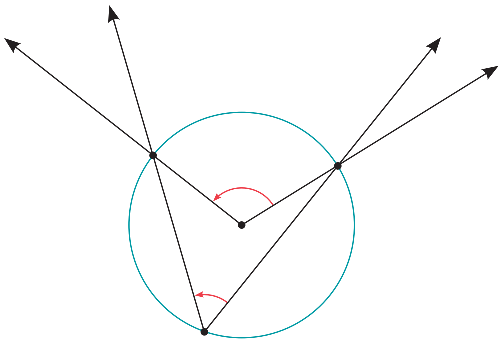


Figura 6

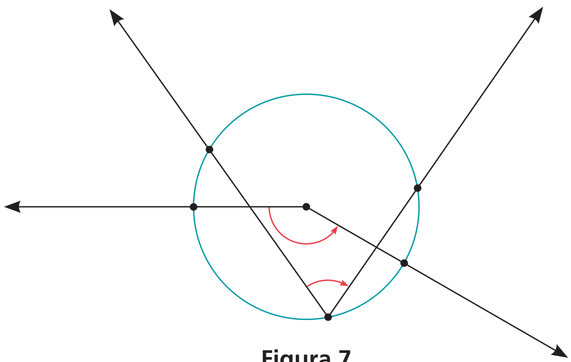


Figura 7

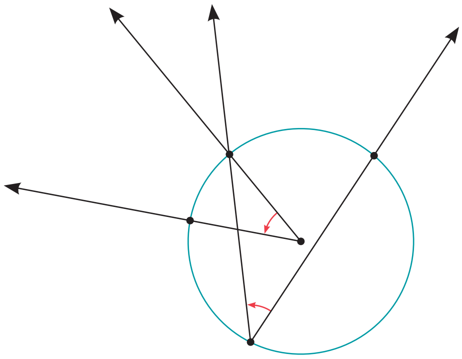


Figura 8

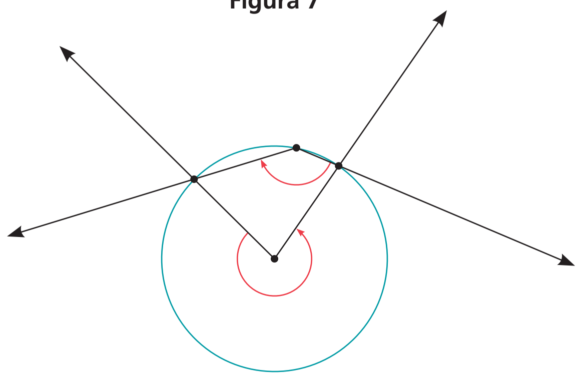


Figura 9

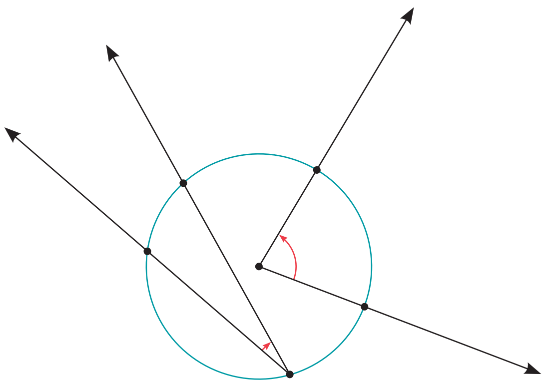


Figura 10

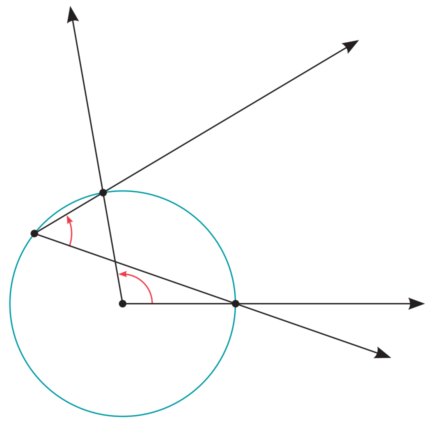


Figura 11

a) ¿En cuáles de estas figuras se cumple que la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo central? ________ , ________ y ________

b) Según los ángulos anteriores, ¿qué condición cumplen el ángulo inscrito y el central para que la medida del primero sea la mitad de la medida del segundo?

____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Marquen los arcos subtendidos por los ángulos inscrito y central en cada uno de las figuras del apartado *Consideremos lo siguiente*.

a) ¿En cuáles de las figuras los ángulos inscrito y central subtienden el mismo arco?

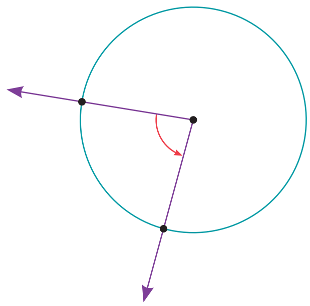
____

b) En cada una de las figuras que anotaron en el inciso anterior, ¿qué relación encuentran entre las medidas de los ángulos inscritos y centrales? _______________

____

____

II. En la siguiente circunferencia se dibujó un ángulo central de 84°. Dibujen dos ángulos inscritos que subtiendan el mismo arco que el ángulo central dado.



a) Con su transportador, midan los ángulos inscritos que dibujaron. ¿Cuánto miden?

____

b) ¿Qué relación hay entre la medida de cada ángulo inscrito dibujado y la medida del ángulo dado? _______________

____

____

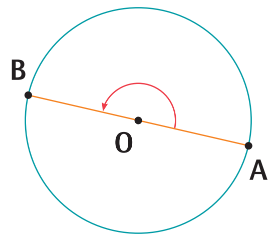
c) ¿Creen que se cumpla la misma relación para cualquier otro ángulo inscrito que subtienda el mismo arco que el ángulo central dado? _______________

Comparen sus respuestas. Regresen al apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

A partir de los ejemplos trabajados, se puede suponer que un ángulo inscrito y uno central cumplen con la siguiente relación: cuando el ángulo inscrito y el ángulo central subtienden el mismo arco, la medida del primero es la mitad de la medida del segundo.

III. Tracen en la circunferencia un ángulo inscrito de tal manera que sus lados pasen por los extremos del diámetro **AB**.



a) ¿El ∡**AOB** es central o inscrito? ____________________ ¿Por qué? ______________

____

____

b) ¿Cuánto mide el ∡**AOB**? ____

c) ¿Cuánto mide el ángulo inscrito que trazaron? ____________________________

Tracen tres ángulos inscritos de manera que sus lados pasen por los puntos **A** y **B**, y que los vértices no coincidan con **A** o con **B**.

d) ¿Los ángulos que trazaron miden lo mismo? ______. ¿Cuánto miden? __________

e) ¿Será posible trazar un ángulo inscrito que sus lados pasen por los extremos del diámetro y que su medida sea menor que 90°?

Justifiquen sus respuestas. ____

____

____

____

Comparen y comenten sus respuestas.

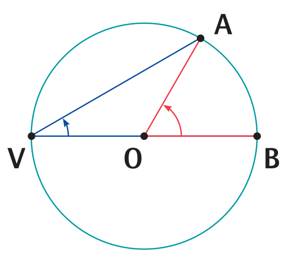
SESIÓN 3

PROBEMOS QUE UNO DE LOS ÁNGULOS ES LA MITAD DEL OTRO

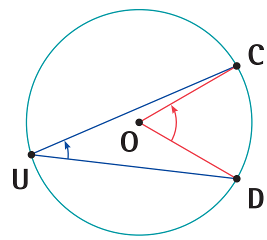
>>> Para empezar

En la sesión 2 se afirmó que *cuando un ángulo inscrito y uno central subienden el mismo arco, la medida del primero es la mitad de la medida del segundo*, a partir de comprobar que la relación se cumplía en varios ejemplos. Sin embargo, aunque la relación se cumple en los ejemplos vistos no se puede garantizar que se cumpla siempre. En esta sesión probarás que esta relación se cumple para cualquier pareja de ángulos central e inscrito que subtiendan el mismo arco.

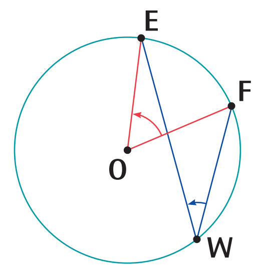
Un ángulo inscrito y un ángulo central que subtienden el mismo arco pueden corresponder a tres casos diferentes:



Caso I



Caso II



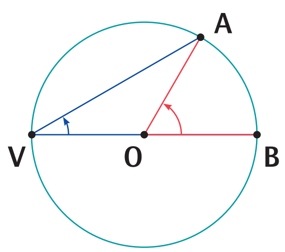
Caso III

Comenten en qué se distingue cada caso.

>>> Manos a la obra

I. Caso I. Observa que $\overline{VB}$, además de ser un lado del ángulo inscrito, es un diámetro de la circunferencia. Otra característica es que el lado **OB** está sobre el lado **VB**.

Elije una de las opciones para completar el siguiente texto y justifica tu elección.



Caso I

El $\measuredangle$***BOA*** *es un ángulo* ________________ . *El* $\measuredangle$***BVA*** *es un ángulo* ________________ .
(central / inscrito) (central / inscrito)

El $\triangle$***VOA*** *es* ________________ *porque* ________________________________
(isósceles / equilátero)

de ahí que los ángulos ____________ *y* ____________ *sean iguales.*

$\measuredangle AOV + \measuredangle BOA =$ __________ *porque* ________________________________
(90° / 180°)

$\measuredangle AOV + \measuredangle OVA + \measuredangle VAO =$ __________ *porque* ________________________________
(180° / 360°)

Comparando las dos igualdades anteriores se observa que $\measuredangle BOA =$ ________________
($\measuredangle$AOV + $\measuredangle$OVA / $\measuredangle$OVA + $\measuredangle$VAO)

ya que $\measuredangle AOV + \measuredangle BOA = \measuredangle AOV + \measuredangle OVA + \measuredangle VAO$ *porque* ________________ .

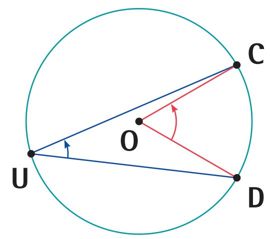
De esta igualdad se obtiene que el $\measuredangle$***BOA*** *es* ________________________ *del* $\measuredangle$***BVA***.
(el doble / la mitad)

Lo que se puede escribir como: La medida del ángulo central ***BOA*** *es el doble de la medida del ángulo* ***BVA***.

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Para completar el texto fue importante tomar en cuenta que uno de los lados del ángulo inscrito es también diámetro de la circunferencia y que un lado del ángulo central también está sobre el diámetro? ¿Por qué?

II. Caso II. Se observa que ninguno de los lados del ángulo inscrito es diámetro de la circunferencia, por esta razón se debe dar una justificación de que en este caso también se cumple la relación entre las medidas de los ángulos inscrito y central que subtienden el mismo arco.



Caso II

Traza el diámetro determinado por $\overline{\mathbf{OU}}$ y denota el otro extremo del diámetro con **X**.

a) El diámetro **UX** dividió a los ángulos dados en dos ángulos cada uno. Expresa cada ángulo señalado como suma de los ángulos que formaste al trazar $\overline{\mathbf{UX}}$.

∡**DOC** = ____________________

∡**DUC** = ____________________

b) Observa que al trazar el diámetro **UX** de la pareja de ángulos del caso II, se formaron dos parejas de ángulos como la del caso I. Utiliza el resultado obtenido en el caso I para responder:

¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos **XUC** y **XOC**? ____________

¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos **DUX** y **DOX**? ____________

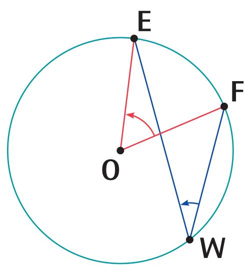
c) Utiliza tus respuestas al inciso anterior y formula una justificación de que la medida del ∡**DUC** es la mitad de la medida del ∡**DOC**? ____________________________

____

____

Comparen sus justificaciones.

III. Da una justificación de que para el **caso III** también se cumple la relación entre las medidas de un ángulo inscrito y uno central que subtienden el mismo arco.



Caso III

Traza el diámetro determinado por $\overline{\mathbf{WO}}$ y denota el otro extremo del diámetro con **Y**. Al trazar $\overline{\mathbf{WY}}$, se identifican dos nuevas parejas de ángulos que, cada una, satisface el caso I

a) La primera pareja consta de los ángulos **FWY** y **FOY**, la segunda de los ángulos **EWY** y **EOY**.

Expresa cada ángulo original como la diferencia de dos de los nuevos.

∡**FWE** = ______________________________

∡**FOE** = ______________________________

b) Utiliza el resultado obtenido del caso I para responder:

¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos **FWY** y **FOY**? ____________

¿Qué relación hay entre las medidas de **EWY** y **EOY**? ____________

c) Da una justificación de que la medida del ∡**FWE** es la mitad de la medida del ∡**FOE**.

____

____

____

Comparen sus justificaciones.

>>> A lo que llegamos

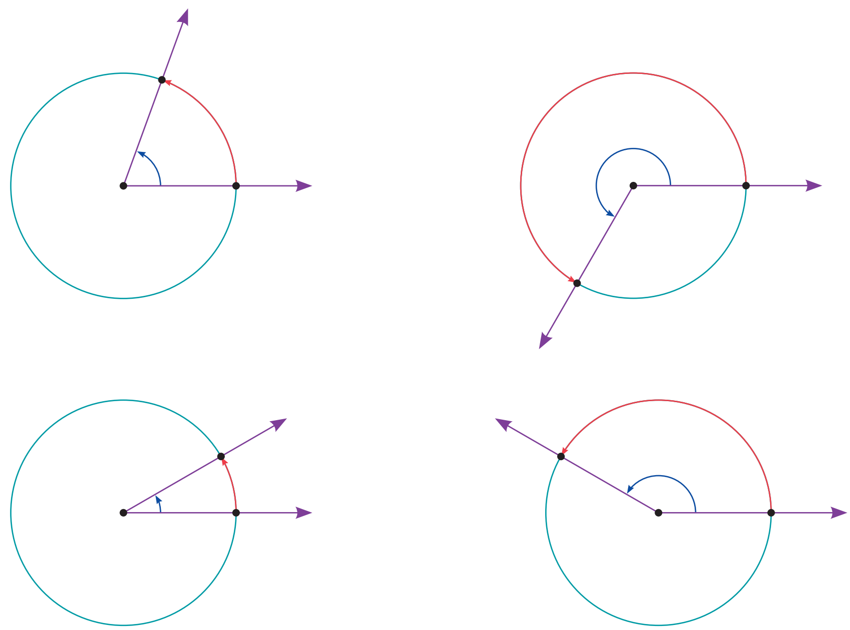
Cualquier pareja de ángulos inscrito y central cae en alguno de los casos examinados, así que la justificación que se mostró en esta sesión garantiza que la relación "la medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco", se cumple siempre que los ángulos inscrito y central subtiendan el mismo arco.

SESIÓN 4

PROBLEMAS DE MEDIDA

>>> Lo que aprendimos

1. Sin utilizar transportador dibujen en cada circunferencia un ángulo inscrito de manera que su medida sea la mitad de la medida del ángulo central dado.

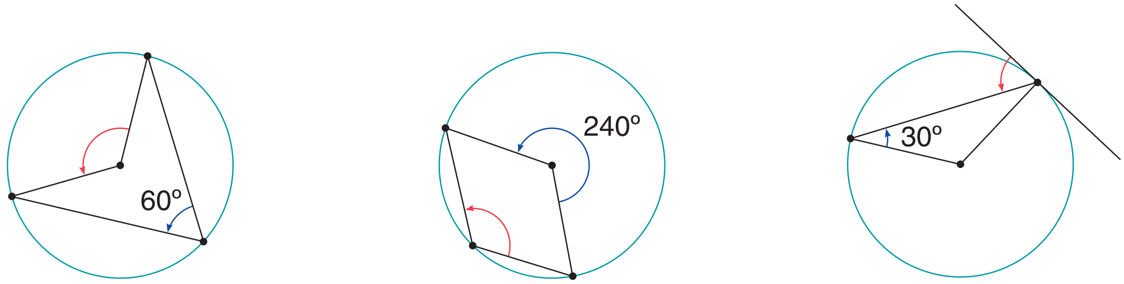


2. Dibujen una semicircunferencia y llamen a sus extremos **C** y **D**. Elijan un punto P sobre la semicircunferencia que no pertenezca al diámetro.

¿El △**CDP** es un triángulo rectángulo? ____________ ¿Por qué? _______________

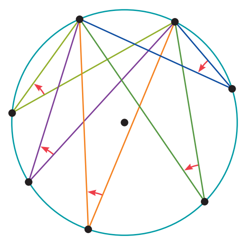
____

3. Sin usar transportador, determinen y anoten la medida de cada uno de los ángulos marcados en rojo.



Comparen y justifiquen sus respuestas.

4. En la circunferencia se trazaron ángulos inscritos que subtienden el mismo arco que un ángulo central de 50°.



a) ¿Cuánto miden los ángulos inscritos? ____________

b) ¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco? _______

Comparen y justifiquen sus respuestas.

La relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco, permite resolver múltiples problemas.

>>> Para saber más

Sobre ángulos en una circunferencia, consulten:
http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/capaz_d3/index.html
Ruta 1: Ángulos centrales
Ruta 2: Ángulos inscritos
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Eduación y Ciencia. España.

Problemas con curvas

En esta secuencia determinarás la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, de área de sectores circulares y de coronas.

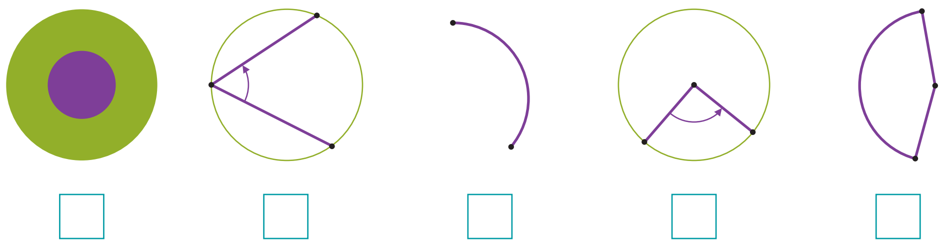
SESIÓN 1

SÓLO UNA PARTE

>>> Para empezar

Relacionen cada figura con su nombre.

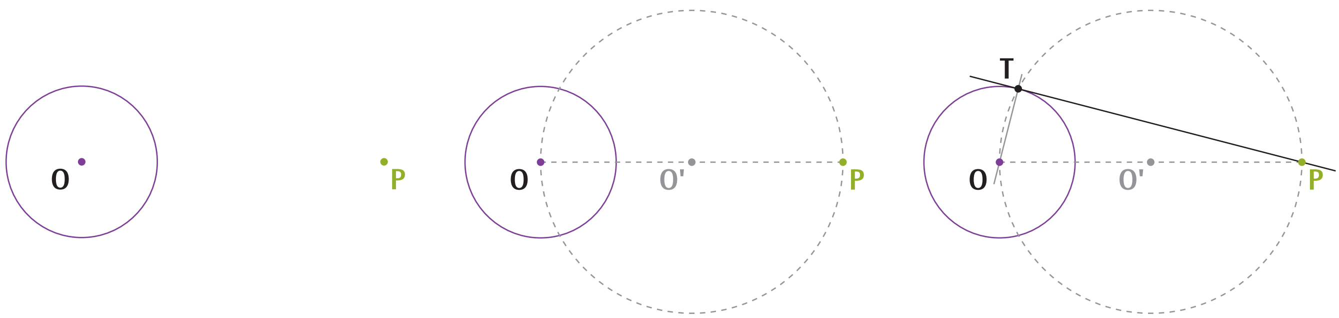
1. **Ángulo central**
2. **Sector circular**
3. **Corona**
4. **Ángulo inscrito**
5. **Arco**



Recuerden que para calcular el área y el perímetro de un círculo se utiliza el número π (Pi). Para realizar cálculos pueden tomar una aproximación a dos decimales para el valor de π, por ejemplo 3.14.

>>> Lo que aprendimos

1. En el siguiente esquema se muestra una forma de trazar con exactitud una recta tangente a la circunferencia de centro **O** desde el punto **P**. La recta tangente está determinada por el segmento **PT**.



Paso 1 **Paso 2** **Paso 3**

a) Describe el procedimiento para trazar la recta **PT**. ______________________________

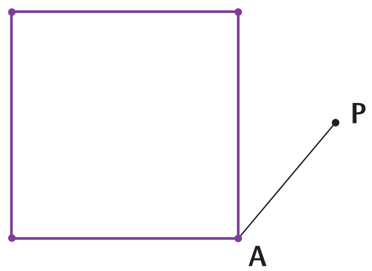
____

b) Justifica que la recta determinada por $\overline{\textbf{PT}}$ es tangente a la circunferencia.

____

____

2. En el esquema siguiente el lado del cuadrado mide 3 cm. El punto **P** se mueve manteniendo una distancia de 2 cm con respecto al vértice **A**.



a) ¿Qué figura determina el punto **P**? ______________________

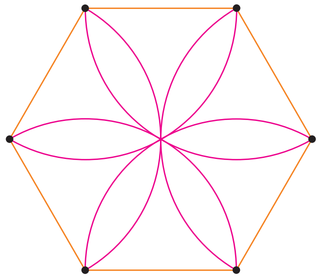
b) ¿Cuánto mide el perímetro de dicha figura? ________

c) Toma en cuenta sólo la parte de la figura que es externa al cuadrado, ¿cuánto mide el área de esa parte de la figura? ________

d) Considera un hexágono regular de 2 m de lado en lugar de un cuadrado, ¿cuánto mediría el área de la figura que determina el punto **P** fuera del hexágono?

____

3. En el siguiente dibujo el hexágono regular mide de lado 2 cm y de apotema 1.73 cm. Reprodúcelo en tu cuaderno.

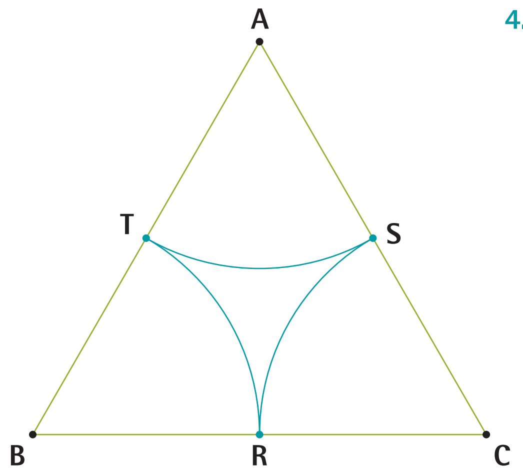


Recuerda que:

Un hexágono regular se puede dividir en 6 triángulos equiláteros congruentes.

a) ¿Cuánto mide el perímetro de la flor? ____________

b) ¿Cuánto mide el área de la flor? ____________



4. En el triángulo equilátero **ABC** de lado 6 cm se trazaron tres arcos con centro en sus vértices y radio la mitad de su lado, como se muestra en la figura. La altura del triángulo mide 5.19 cm.

a) ¿Cuánto mide el perímetro de la región determinada por los tres arcos? __________

b) ¿Cuánto mide el área del triángulo **ABC**? __________

c) ¿Cuánto mide el área del sector circular **BTR**? __________

d) ¿Cuánto mide el área de la región determinada por los tres arcos? __________

SESIÓN 2

LO QUE RESTA

>>> Lo que aprendimos

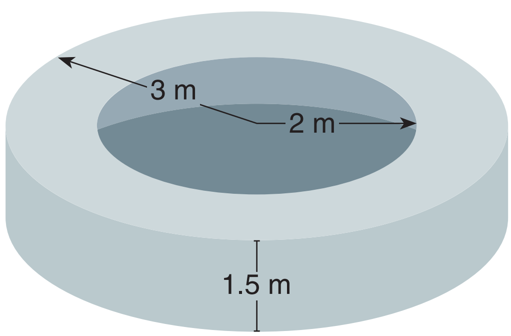
1. Dibuja dos circunferencias concéntricas cuyos radios midan 1 cm y 3 cm respectivamente.

a) ¿Cuánto mide el área que encierra la circunferencia de radio 1 cm? __________

b) ¿Cuánto mide el área que encierra la circunferencia de radio 3 cm? __________

c) ¿Cuánto mide el área de la región comprendida entre las dos circunferencias? __________

2. En el siguiente dibujo se muestra el esquema de una fuente y sus dimensiones.



a) ¿Cuánto mide el área de la cara lateral de la fuente?

____

b) ¿Cuánto mide el área de la cara superior de la fuente?

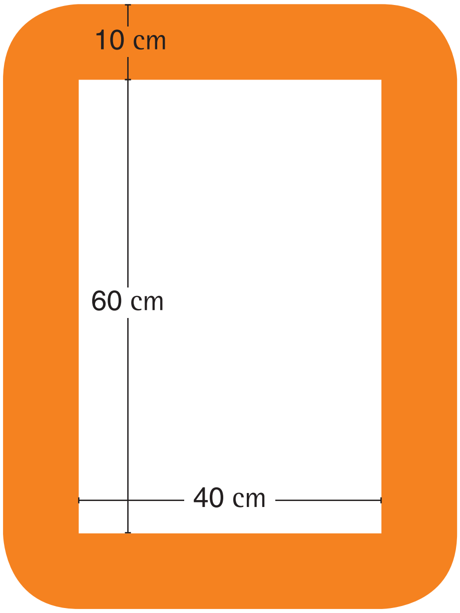
____

DE TODO UN POCO

SESIÓN 3

>>> Lo que aprendimos

1. Calcula el área de la figura anaranjada.



2. Un perro está atado a una cadena que le permite un alcance máximo de 2 m. La cadena está unida a una argolla que se desplaza en una barra en forma de **L**, cuyos segmentos miden 2 m y 4 m.

a) Dibuja la barra en la que se desplaza la argolla; puedes utilizar una escala de metros a centímetros. Dibuja el contorno de la región en la que puede desplazarse el perro.

b) ¿Cuál es el área de la región en la que puede desplazarse el perro?

>>> Para saber más

Sobre el cálculo de áreas y perímetros de figuras formadas por arcos y rectas, consulta, en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Hernández Garcíadiego, Carlos. "Áreas de sectores circulares" en *La geometría en el deporte*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

SECUENCIA 6

La razón de cambio

En esta secuencia estudiarás las razones de cambio de dos conjuntos de cantidades que están en una relación de proporcionalidad directa.

SESIÓN 1

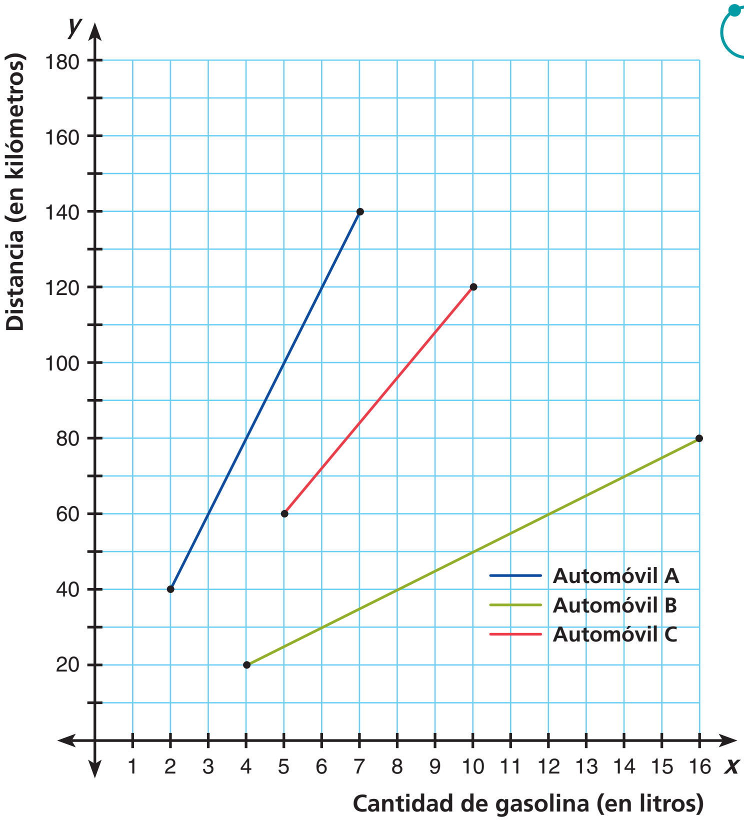
EL INCREMENTO

>>> Para empezar

En primero y segundo grado has representado de diferentes maneras las relaciones funcionales: una tabla, una expresión algebraica, una gráfica o, incluso, un enunciado; cada una de estas representaciones da diferente información.

Por ejemplo, en la secuencia 20 de tu libro de **Matemáticas II**, volumen II, aprendiste que la gráfica de la expresión $y = 3x + 2$ es una línea recta con pendiente igual a 3. En esta secuencia continuarás el estudio de la pendiente de una recta.

>>> Consideremos lo siguiente



La siguiente gráfica describe la relación entre la distancia recorrida y la cantidad de gasolina consumida por tres automóviles. El consumo de gasolina de cada automóvil es constante.

Recuerda que:

El rendimiento de un automóvil es la cantidad de kilómetros que recorre con un litro de gasolina.

Si el rendimiento de un automóvil es constante, la distancia recorrida y la cantidad de gasolina que se consume son cantidades directamente proporcionales.

De acuerdo con la información de la gráfica:

a) ¿Cuántos kilómetros recorre el automóvil C con 13 ℓ de gasolina? ____________

b) Si el automóvil C recorriera 204 km, ¿cuántos litros de gasolina consumiría? _______

c) ¿Cuántos kilómetros recorre el automóvil A con un litro de gasolina? ____________

d) ¿Qué distancia recorre cada automóvil con tres litros de gasolina?

Automóvil A: ____________ Automóvil B: ____________ Automóvil C: ____________

Comparen sus respuestas, contesten y comenten:

a) Por cada litro de gasolina que consume cada automóvil, ¿cuántos kilómetros recorre?

Automóvil A: ____________ Automóvil B: ____________ Automóvil C: ____________

b) ¿Qué automóvil tuvo un mejor rendimiento? ____________

>>> Manos a la obra

I. Responde lo que se te pide a ontinuación.

a) Completa las siguientes tablas para encontrar la distancia recorrida por el automóvil A y por el automóvil C a partir de la cantidad de gasolina consumida.

Cantidad de gasolina (en litros)	Distancia recorrida (en kilómetros)
5	100
6	
7	
8	
9	
10	200

Automóvil A

Cantidad de gasolina (en litros)	Distancia recorrida (en kilómetros)
5	60
6	
7	
8	
9	
10	120

Automóvil C

b) Completa la siguiente tabla considerando las distancias recorridas del quinto litro al décimo litro de gasolina consumida:

	Distancia recorrida	Cantidad de gasolina consumida	Cociente de la cantidad de kilómetros recorridos entre la cantidad de gasolina consumida
Automóvil A			
Automóvil C			

c) Completa la siguiente tabla considerando las distancias recorridas del quinto litro al séptimo litro de gasolina consumida:

	Distancia recorrida	**Cantidad de gasolina consumida**	**Cociente de la cantidad de kilómetros recorridos entre la cantidad de gasolina consumida**
Automóvil A			
Automóvil C			

Comparen sus respuestas y contesten:

a) ¿Cómo son los cocientes que encontraron en las tablas anteriores para el automóvil A, distintos o iguales? ____________

b) ¿Cómo son los cocientes que encontraron en las tablas anteriores para el automóvil C, distintos o iguales? ____________

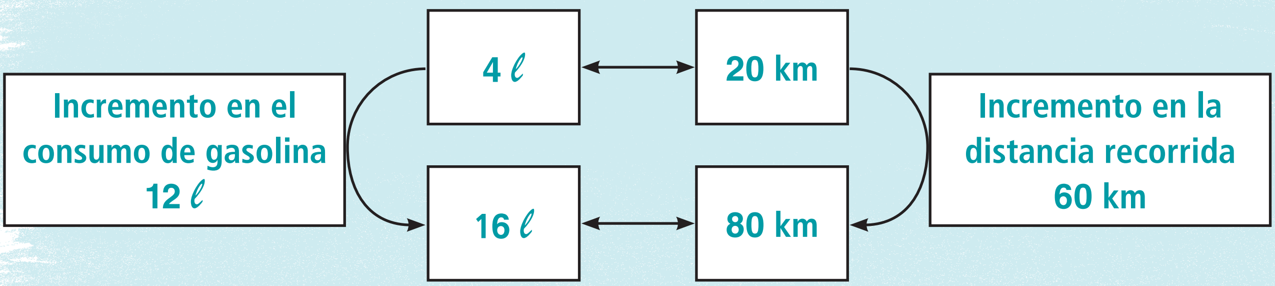
c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite encontrar la distancia recorrida por el automóvil A, a partir de la cantidad de gasolina que consumió? __________

d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite encontrar la distancia recorrida por el automóvil C, a partir de la cantidad de gasolina que consumió? __________

>>> A lo que llegamos

Cuando dos conjuntos de cantidades están relacionadas entre sí, se puede estudiar el cambio o incremento de una cantidad respecto al cambio o incremento de la otra.

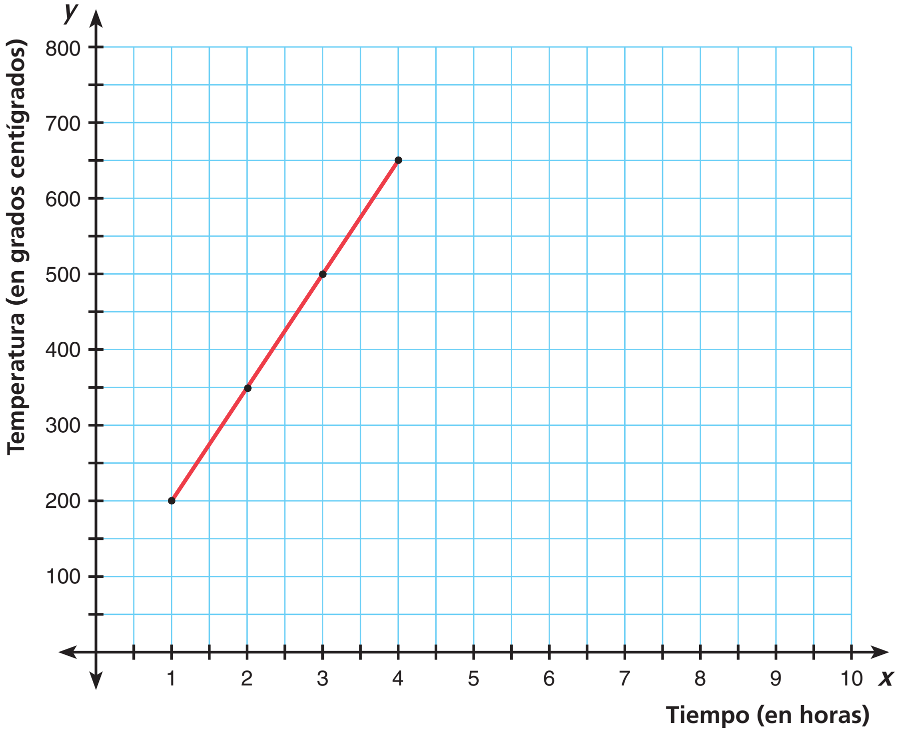
En este caso, la distancia recorrida está relacionada de manera directamente proporcional a la cantidad de gasolina consumida. Los incrementos de estas cantidades se pueden comparar. Por ejemplo, para el automóvil B, un incremento de 60 km recorridos corresponde a un incremento de 12 ℓ de gasolina consumidos.



Al cociente que se obtiene al dividir el incremento de un cantidad entre el incremento correspondiente a la otra se le llama razón de cambio.

En el ejemplo, la razón de cambio entre la distancia recorrida (60 km) y la cantidad de gasolina consumida (12 ℓ) es: $\frac{60}{12} = 5$, que resulta ser el rendimiento del automóvil B.

II. Una barra de acero se calienta en un horno de alta temperatura. La siguiente gráfica muestra los resultados de variación de la temperatura de la barra respecto al tiempo de calentamiento.



a) Con la información de la gráfica anterior completa la siguiente tabla:

	Incremento del tiempo (en horas)	Incremento en la temperatura (en °C)	Razón de cambio de la temperatura entre el tiempo
De la primera a la cuarta hora	3	450	
De la primera a la tercera hora			150
De la primera a la segunda hora	1		
De la segunda a la tercera hora		150	
De la tercera a la cuarta hora	1		

b) ¿Cómo son las razones de cambio de la tabla anterior, iguales o diferentes?

____

Explica por qué.

____

c) ¿Qué temperatura tenía la barra de acero cuando se introdujo al horno? ________

d) ¿Cuál será la temperatura de la barra de acero en la séptima hora? ________

Comparen sus resultados y contesten:

¿Cuál es el incremento de la temperatura de la barra en cada hora? ________

>>> A lo que llegamos

Cuando la gráfica asociada a la relación entre dos conjuntos de cantidades son puntos que están sobre una línea recta, la razón de cambio es constante.

En el problema anterior, la razón de cambio de la temperatura en cada hora es 150, sin importar el intervalo de tiempo en que se calculen los incrementos.

SESIÓN 2

PENDIENTE Y RAZÓN DE CAMBIO

>>> Para empezar

En la secuencia 2 **¿Cómo se mueven las cosas?** de tu libro de **Ciencias II**, aprendiste que, en general, la rapidez y la velocidad proporcionan distintas informaciones sobre el movimiento de un objeto. Sin embargo, cuando el objeto se mueve en una línea recta y lo hace en un sólo sentido, la rapidez y la magnitud de la velocidad coinciden.

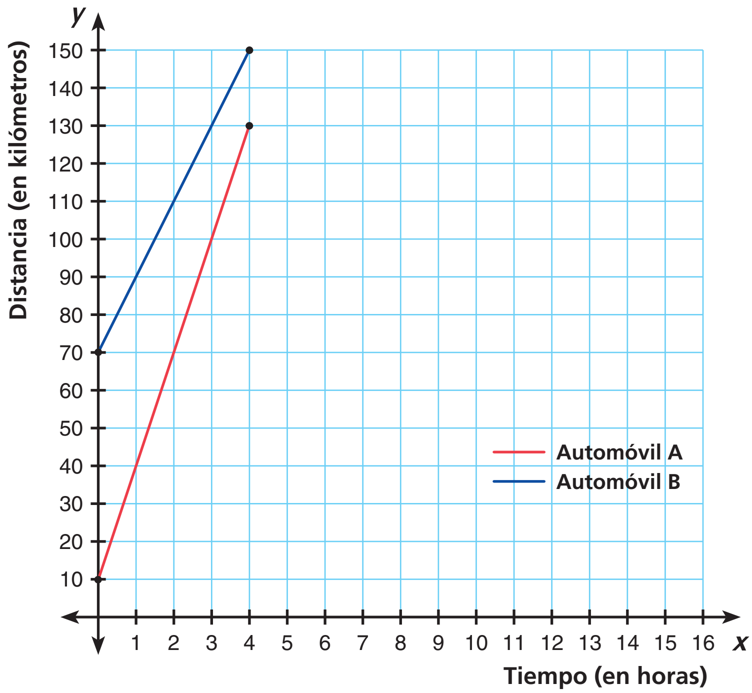
Conexión con **Ciencias II**

Secuencia 2: ¿Cómo se mueven las cosas?

En esta sesión estudiarás el movimiento de dos automóviles al ir sobre una línea recta en un mismo sentido. A lo largo de la sesión, nos referiremos al cociente de la distancia recorrida entre el tiempo empleado en recorrerla como velocidad.

>>> Consideremos lo siguiente

La siguiente gráfica muestra las posiciones en las que, en determinados tiempos, se encontraban dos automóviles. Cada automóvil mantuvo una velocidad constante. Además, salieron de lugares diferentes.



De la segunda hora a la séptima hora:

a) Para el automóvil A, ¿cuál es la razón de cambio de la distancia recorrida entre el tiempo? ______________________

b) ¿A que velocidad fue el automóvil A? ______________________

c) Para el automóvil B, ¿cuál es la razón de cambio de la distancia recorrida entre el tiempo? ______________________

d) ¿A que velocidad fue el automóvil B? ______________________

e) ¿Qué automóvil fue a mayor velocidad? ______________________

Recuerda que:

Cuando un automóvil va a velocidad constante, la gráfica asociada a la relación distancia-tiempo es una línea recta.

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Responde lo que se te pide a continuación.

a) Completa las siguientes tablas para encontrar las posiciones de los automóviles en los instantes indicados de tiempo.

Automóvil A	
Tiempo transcurrido (en horas)	**Distancia a la que se encuentra el automóvil (en kilómetros)**
1	40
2	
3	
4	
5	

Automóvil B	
Tiempo transcurrido (en horas)	**Distancia a la que se encuentra el automóvil (en kilómetros)**
1	90
2	
3	
4	
5	

b) Con la información de la tabla del automóvil A, completa la siguiente tabla para encontrar la razón de cambio de la distancia recorrida entre el tiempo.

	Incremento del tiempo (en horas)	Incremento de la distancia recorrida (en kilómetros)	Razón de cambio del automóvil A (distancia-tiempo)
De la segunda a la tercera hora	1		
De la segunda a la cuarta hora	2		
De la tercera a la cuarta hora			

Automóvil A

c) ¿A qué velocidad va el automóvil A? ____________________

d) ¿En qué kilómetro inició su recorrido el automóvil A? ____________________

e) Si y es la distancia recorrida por el automóvil A en el tiempo x, ¿cuál la expresión algebraica que permite calcular y a partir de x? Subráyala.

- $y = 30x$
- $y = 30x + 10$
- $y = 30x + 70$

f) Con la información de la tabla del automóvil B, completa la siguiente tabla para encontrar la razón de cambio de la distancia recorrida entre el tiempo.

	Incremento del tiempo (en horas)	Incremento de la distancia recorrida (en kilómetros)	Razón de cambio del automóvil B (distancia-tiempo)
De la primera a la segunda hora	1		
De la primera a la tercera hora			
De la primera a la cuarta hora	3		

Automóvil B

g) ¿A qué velocidad va el automóvil B? ____________________

h) ¿En qué kilómetro inicio su recorrido el automóvil B? ____________________

i) Si y es la distancia recorrida por el automóvil B en el tiempo x, ¿cuál es la expresión algebraica que permite calcular y a partir de x? Subráyala.

- $y = 20x$
- $y = 20x + 10$
- $y = 20x + 70$

Recuerda que:
La pendiente de una recta
$y = mx + b$
es el número m.

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Cómo se comparan la pendiente de la recta y la razón de cambio (distancia-tiempo) asociadas al automóvil A?

b) ¿Cómo se comparan la pendiente de la recta y la razón de cambio (distancia-tiempo) asociadas al automóvil B?

>>> A lo que llegamos

Cuando la relación entre dos cantidades tenga por gráfica una línea recta, la razón de cambio es igual a la pendiente de la recta.

Por ejemplo, si un automóvil E va a velocidad constante de 40 km/h y parte del kilómetro 15 de la carretera, entonces la expresión algebraica asociada a la distancia que recorre el automóvil a partir del tiempo es $y = 40x + 15$; la pendiente de esta recta es 40 y la razón de cambio (distancia-tiempo) es también 40.

II. a) Si un automóvil C se desplaza a mayor velocidad que el automóvil A, ¿cómo es la razón de cambio del automóvil C respecto a la del automóvil A, mayor o menor?

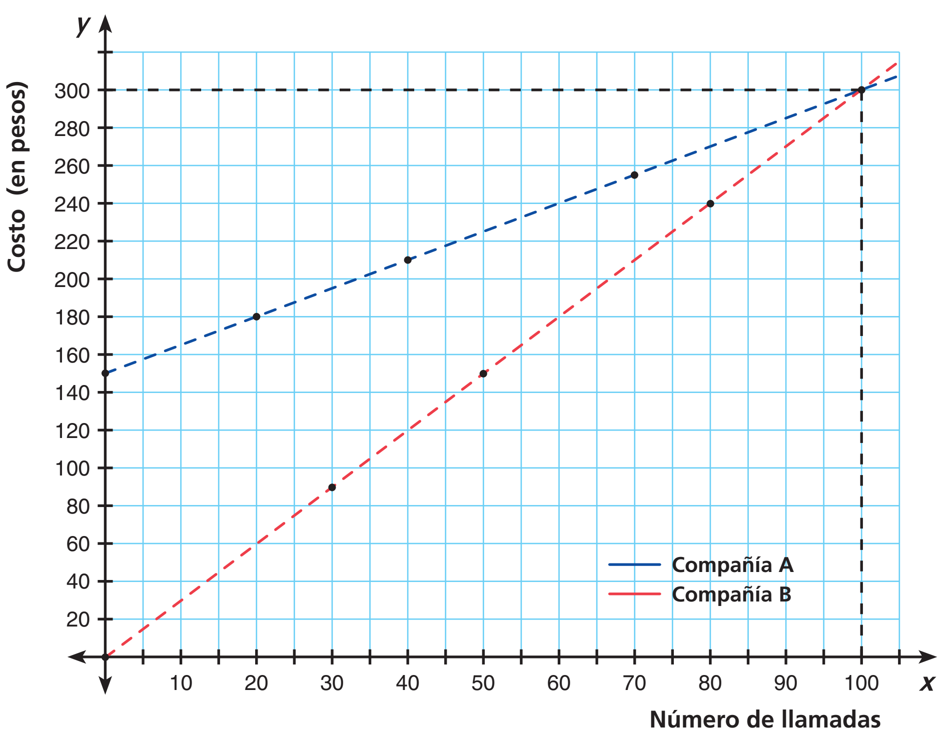
____

b) Si la razón de cambio de un automóvil D es mayor que del automóvil B, ¿qué automóvil se desplaza a mayor velocidad? __________________________

>>> Lo que aprendimos

La siguiente gráfica muestra el costo del servicio telefónico de dos compañías.

Costo del servicio telefónico



a) ¿Cuál es la razón de cambio (aumento en el costo por llamada) en la compañía A?

____

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta asociada a la compañía A? _______________

c) ¿Cuál es la razón de cambio (aumento en el costo por llamada) en la compañía B?

____

d) ¿Cuál es la pendiente de la recta asociada a la compañía B? _______________

e) ¿Por qué el costo de las 100 primeras llamadas telefónicas es el mismo en las dos compañías? _______________

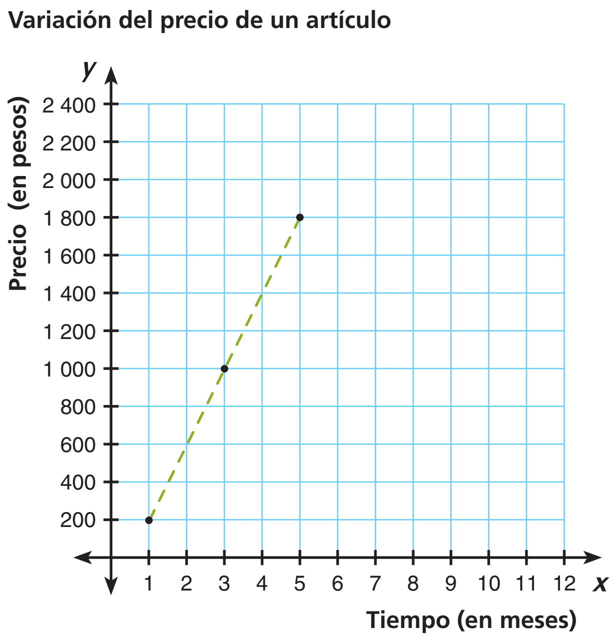
f) ¿Cuál de las dos compañías tiene una tarifa más económica si se hacen menos de 100 llamadas? __________ ¿y si se hacen más de 100? __________

SESIÓN 3

ALGUNAS RAZONES DE CAMBIO IMPORTANTES

>>> Lo que aprendimos

1. La siguiente gráfica muestra los cambios en el precio de un artículo durante los primeros meses del año.



a) Suponiendo que el aumento en el precio del artículo es el mismo cada mes, completa la siguiente tabla.

	Incremento del tiempo (en meses)	Incremento del precio (en pesos)	Cociente del incremento del precio entre el tiempo
Del primero al tercer mes			
Del primero al cuarto mes			
Del tercero al sexto mes			
Del primero al segundo mes			
Del segundo al tercer mes			
Del tercero al cuarto mes			

b) ¿Cómo son los cocientes de la tabla anterior, iguales o diferentes? ____________

Explica por qué sucede así ____

c) Si el primer mes corresponde a enero, ¿cuál es el precio del artículo en marzo?

____

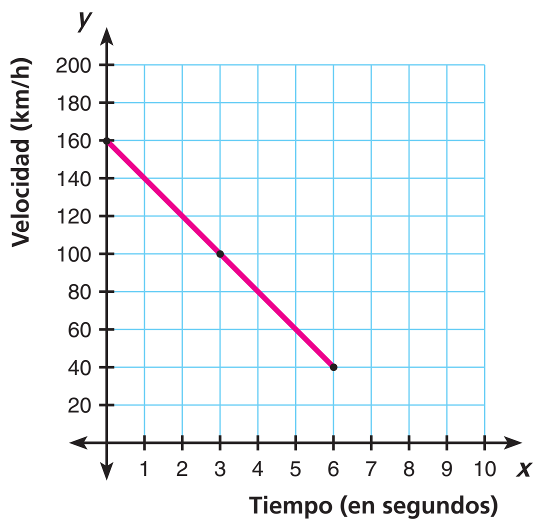
d) Si el incremento fue el mismo cada mes, ¿cuál será el precio del artículo en diciembre?

____

Comparen sus resultados y contesten:

¿Cuál es el incremento mensual del precio del artículo? __________

2. La siguiente gráfica muestra la relación entre la velocidad de un automóvil y el tiempo que transcurre hasta estar en alto total.



Recuerda que:

La ordenada al origen de una recta es la ordenada del punto en que la recta interseca al eje y.

Recuerda que:

La pendiente de una línea recta puede ser un número con signo positivo o negativo y que la razón de cambio es igual a la pendiente de la recta.

a) ¿Cuál es la ordenada al origen de la recta anterior? ______________

b) Si y es la velocidad del automóvil en el tiempo x, ¿cuál es la expresión algebraica asociada a esta situación? Subráyala.

- $y = -180x$
- $y = -20x + 160$
- $y = -180x + 20$

c) Completa la siguiente tabla para verificar que la expresión algebraica que elegiste es la correcta.

Tiempo (en segundos) x	Distancia (en metros) y
1	140
2	
3	
4	
5	

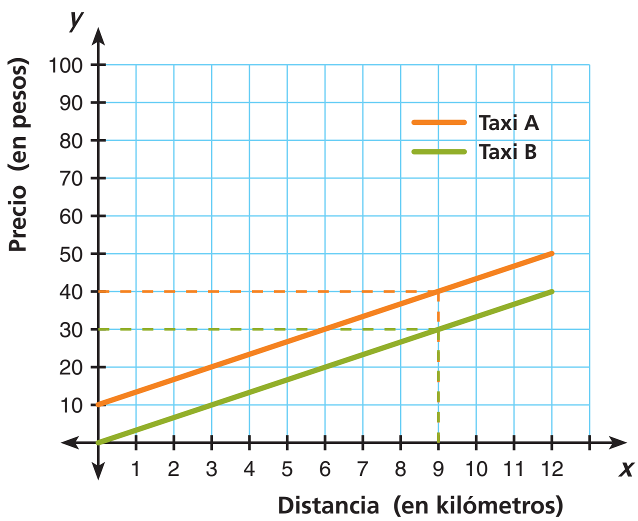
d) A medida que va transcurriendo el tiempo, ¿la velocidad del automóvil aumenta o disminuye? ____________________

e) ¿Cómo es la pendiente de la recta anterior, positiva o negativa? ______________

f) ¿Cuál es la razón de cambio (velocidad-tiempo) del problema anterior? ________

La razón de cambio puede ser un número con signo positivo o negativo.

3. La siguiente gráfica muestra el costo de un viaje en dos taxis en dos ciudades distintas.



a) ¿Cuál es el costo en el taxi A por cada kilómetro recorrido? ____________

b) ¿Cuál es la razón de cambio del taxi A? ____________

c) ¿Cuál es el costo en el taxi B por cada kilómetro recorrido? ____________

d) ¿Cuál es la razón de cambio (precio-distancia) del taxi B? ____________

e) ¿Qué taxi cobró más? ____________

f) ¿Por qué cobró más un taxi que otro? ____________

g) ¿Cómo se refleja lo anterior respecto a la razón de cambio (precio-distancia) de cada taxi? ____________

>>> Para saber más

Sobre la pendiente de una recta como razón de cambio, consulta:
http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Funcion_afin/index.htm
Ruta: Índice → características
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Diseño de experimentos y estudios estadísticos

En esta secuencia aprenderás que, para obtener información confiable en un experimento o estudio estadístico, es conveniente reflexionar sobre los procedimientos y herramientas que se utilizaran para recopilar, organizar y representar los datos que se obtengan en cada etapa que conforma al experimento o estudio en cuestion.

SESIÓN 1

DISEÑO DE UN ESTUDIO ESTADÍSTICO ¿QUÉ MATERIA TE GUSTA MÁS?

>>> Para empezar

Los estudios estadísticos nos permiten investigar sobre diversas situaciones o fenómenos.

Por medio de un estudio estadístico adecuado, lo mismo podemos conocer los efectos que provoca una determinada sustancia en los seres vivos, que el comportamiento del mercado ante un determinado producto o servicio así como, conocer las preferencias de un determinado grupo o sector.

Una fase importante del estudio, dado que es el inicio, es determinar cuál es la pregunta o el problema que se quiere estudiar y la manera en que se obtendrán los datos.

>>> Consideremos lo siguiente

Lee cuidadosamente las preguntas que aparecen en las siguientes encuestas y contéstalas:

Encuesta A	Encuesta B
• Asignatura o materia que te gusta más y por qué ____________________ ____________________	• Asignatura o materia que te resulta más fácil. Anota tu última calificación en esa materia ________________ ________
• Asignatura o materia que te gusta menos y por qué ____________________ ____________________	• Asignatura o materia que te resulta más difícil. Anota tu última calificación en esa materia ________________ ________

a) ¿Cuál de las encuestas anteriores utilizarías para obtener datos con los que puedas analizar los siguientes temas? Anota A o B en cada tema para indicar que es la encuesta A o la encuesta B, según consideres.

Temas

☐ Nivel de aprovechamiento y desempeño de los estudiantes.

☐ Intereses e inquietudes de los estudiantes en su escuela.

☐ Hábitos de estudio de los estudiantes de secundaria.

☐ Preferencia acerca de las materias que cursan los estudiantes.

Encuesta A

Encuesta B

Justifica tu respuesta. ____

____

____

b) De acuerdo con lo que anotaste en el inciso anterior, si se pretende estudiar los intereses e inquietudes de los estudiantes, ¿será suficiente con los datos que se obtengan de las dos preguntas de la encuesta que elegiste? __________ ¿Por qué?

____

____

c) ¿Qué tipo de respuestas se pueden obtener al realizar la encuesta B? Anota algunos ejemplos de posibles respuestas. ______________________________

____

____

d) Si se quiere recopilar datos para investigar sobre los hábitos de estudio de los estudiantes de secundaria, ¿qué otras preguntas consideras sería necesario incluir en la encuesta? ______________________________

____

____

¿Por qué es importante hacer las preguntas que sugieres? ____________________

____

____

e) Si el tema que se pretende estudiar comprende intereses e inquietudes de los estudiantes. ¿Cuáles esperas que sean los de tus compañeros? ____________________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. En un grupo realizaron las dos encuestas anteriores; los datos que obtuvieron los organizaron en tablas y presentaron en gráficas.

a) ¿Cuál de las siguientes tablas corresponde a datos que se pudieron obtener al aplicar la encuesta A? Marquen con una ✓ y justifiquen su respuesta.

Recuerden que:

En general, los datos que se obtienen en un estudio o experimento pueden ser de dos tipos, cualitativos *(por ejemplo, el color de cabello, ojos o piel) o* cuantitativos *(por ejemplo, la edad, el peso y la estatura de una persona).*

En ambos casos se pueden organizar en tablas *de* frecuencia absoluta, relativa *o* porcentaje. *Cuando el conjunto de datos es cuantitativo y grande se puede organizar en tablas de datos agrupados en intervalos.*

☐ ____

Asignatura: matemáticas				
Calificación	**Más fácil**		**Más difícil**	
	Conteo	**Frecuencia**	**Conteo**	**Frecuencia**
5	I	1	III	3
6	II	2	IIIII	5
7	I	1	II	2
8	II	2		0
9	III	3	I	1
10	IIII	4	II	2

☐ ____

La materia que más me gusta: educación física		
Porque	**Frecuencia**	**Porcentaje**
hacemos ejercicio	2	33
salimos a jugar	3	50
no hacen examen	1	16

b) Las siguientes gráficas fueron elaboradas por diferentes alumnos para mostrar los datos que obtuvieron al aplicar la encuesta B. ¿Cuál gráfica muestra adecuadamente los datos que pudieron obtenerse al aplicar dicha encuesta? Marquen con una ✓ en el recuadro correspondiente y justifiquen su respuesta.

Recuerden que:

Una gráfica de barras *se utiliza para presentar y comparar frecuencias con que ocurre una cualidad o atributo.*

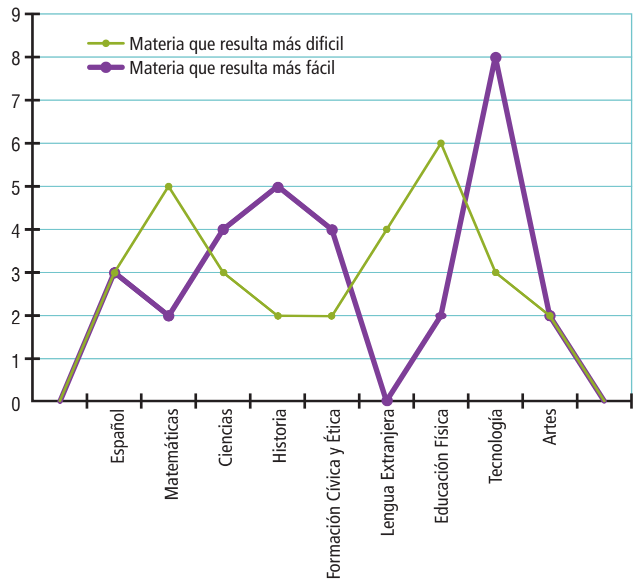
Una gráfica circular sirve *para comparar qué fracción de un todo es cada parte.*

Un histograma presenta datos agrupados en intervalos; cuando éstos son iguales, la altura de cada barra indica su frecuencia.

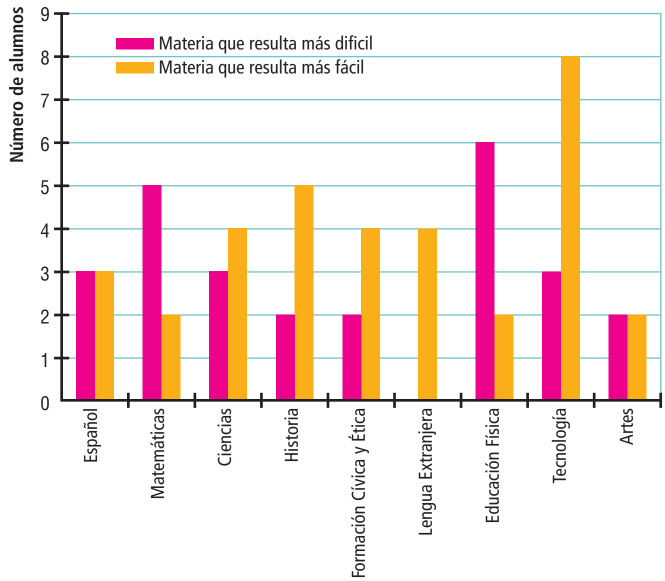
Un polígono de frecuencias *también muestra la frecuencia absoluta, relativa o porcentaje de datos agrupados.*

Una gráfica de línea *presenta las variaciones en el tiempo.*

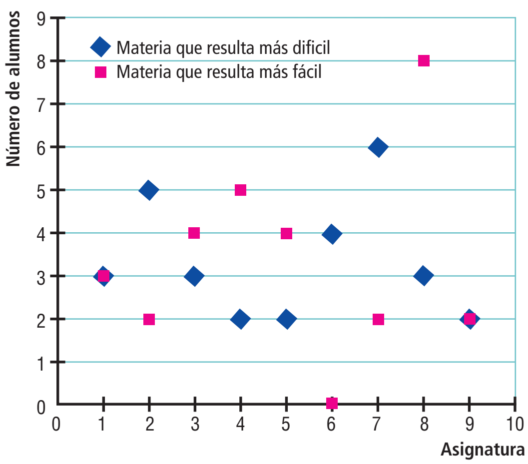
Resultados de la encuesta



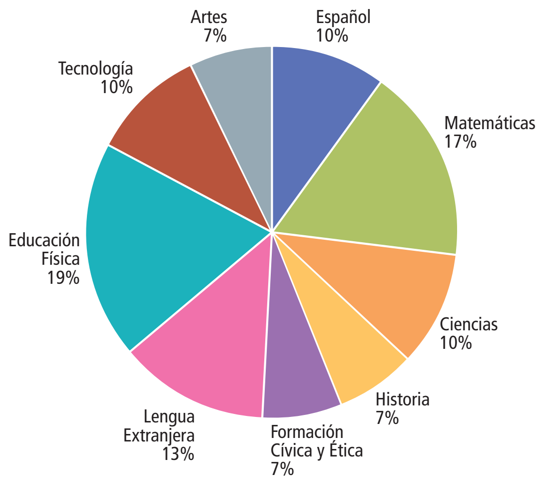
Resultados de la encuesta



Resultados de la encuesta



Resultados de la encuesta



c) De acuerdo con la gráfica que consideran muestra correctamente los resultados de la encuesta B, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Señalen con una "V" en el recuadro.

- ☐ La segunda materia más difícil para los alumnos es matemáticas.
- ☐ La materia más fácil es educación física.
- ☐ Ningún alumno consideró que la materia de lengua extranjera es más fácil.
- ☐ La materia que más alumnos eligen como la más fácil es tecnología.

II. Organícense en equipos y cada uno seleccione una de las dos encuestas que aparecen en el apartado *Consideremos lo siguiente*. Pidan a todos sus compañeros que les contesten.

a) Clasifiquen las respuestas que obtuvieron para cada pregunta y registren sus resultados en una tabla; para ello deberán acordar cuáles y cuántas columnas y renglones deberá tener, así como cuáles son los encabezados y títulos adecuados. Utilicen el siguiente espacio para elaborarla.

b) ¿Qué tipo de gráfica es la que mejor describe los datos que registraron en la tabla? ¿Cuáles son los ejes y qué escala utilizarán? ¿Cuál es el título más apropiado? Trácenla en el siguiente espacio.

c) Escriban una conclusión sobre los resultados obtenidos en su encuesta y preséntenla a su grupo. ____________________

____

____

>>> A lo que llegamos

La realización de un estudio considera diferentes fases.

Fase 1: definición del estudio o experimento. ¿Qué es lo que se quiere investigar y analizar? ¿Qué se espera encontrar?

Fase 2: obtención de datos. ¿Cómo se obtendrán los datos para analizar? ¿A quiénes se les preguntará? ¿Qué tipo de pregunta es más conveniente hacer?

Una manera de obtener datos para realizar un estudio estadístico es por medio de la aplicación de una encuesta.

Fase 3: organización y análisis de los datos. ¿Qué tipo de datos se obtendrán? ¿Cómo es conveniente ordenar y clasificar los datos? ¿Qué tipo de tabla o gráfica es conveniente para mostrar y analizar los datos obtenidos?

Fase 4 : presentación de conclusiones o reportes. ¿Cuáles son los resultados que se obtuvieron al realizar el análisis? Los resultados obtenidos, ¿afirman o contradicen lo que se esperaba encontrar?

Cuando se quiere estudiar una situación o fenómeno en una población muy grande, sólo se encuesta a una parte de ella; a ese subgrupo se le llama muestra. Si así se hiciera habría que buscar que la muestra conserve las mismas características de la población.

UN JUEGO DE LETRAS. OTRO ESTUDIO ESTADÍSTICO

SESIÓN 2

>>> Consideremos lo siguiente

En las diferentes lenguas que se hablan en el mundo prevalece más el uso de unas letras que otras.

¿Saben qué letras se utilizan con mayor frecuencia en el idioma español? ¿Creen que son las mismas que las que se utilizan más en inglés? Y en una lengua indígena, por ejemplo, el zapoteco, ¿qué letras serán las que con mayor frecuencia se utilizan?

>>> Manos a la obra

I. Reunidos en equipos, lean los siguientes tres textos y después cada equipo seleccione uno de ellos para realizar lo que se pide en los incisos.

Texto I

Cuento del tonto que comió pollo

Había una vez tres hermanos, el mayor y el segundo estaban bien y el tercero era un tonto, tenían un pollo pero siempre que hablaban de matar el pollo decían que no le iban a dar ningún pedazo al tonto por tonto, llegó el día que mataron al pollo y los hermanos que estaban bien ya tenían un plan para no darle nada al tonto, lo prepararon y lo dejaron listo para meterlo al horno y llamaron al tonto y ya reunidos los tres le dijeron al tonto, el que sueñe un bonito sueño se come el pollo, bueno dijo el tonto; metieron el pollo dentro del horno y se fueron a dormir, pasó un buen rato y cuando los dos hermanos ya estaban bien dormidos, el tonto se levantó y fue a la cocina y se comió el pollo, terminó y se fue a dormir. Al otro día temprano se levantaron y el mayor dijo: vamos a hablar del sueño que tuvimos anoche, yo voy a empezar, dijo, pues yo anoche fui a la Gloria y vi al Señor, sí dijo el otro hermano, yo vi cuando te ibas volando, me agarré de la manga de tu camisa y nos fuimos los dos, sí contestó el tonto, yo vi cuando se iban y como pensé que ya no iban a regresar fui a la cocina y me comí el pollo, sólo quedaron dos huesitos para que chupen.

Cuento escrito por: Joaquín Martínez Mendoza, 11 años, Juchitán de Zaragoza, Oaxaca. Tomado del libro *Las narraciones de niñas y niños indígenas*. Vol. II. México: SEP, Libros del Rincón, 2001.

Texto II

"Didxa guca zti guida gudo beere"

Chona bichi ca´be chupa la´ nu xpíaní ne tabí guidxa la´ napa ca´be ti beeré ná cabe xhimodo goo ca´be lameé ne ná cabe la´quizudidí cati nda guidxa biú ti dxí bíti cá lame má chindú cá lame xuqui rabí cá be guidxa tula´guindií xcanda ti bacaanda o má xicarú ngue goo lá mé Gulu ca´be beeré que xuqui ne guta guxii cá be ná ca´be chíchite ca´be guidxa gudídi ti xíigabá má nixiaxi cá be biazaá guidxa gudo beeré que ne guta guxií bira guela´zti dzí viaza ca´be ne guíidxicá be guidxa na luugolá que ná lá gunie xcandá guyaa ranú díuxhi bícábí ztobí que ná la ca´biá lí má zeú que gunda lú manga ztí gamixha lú na guídzxa ná lá cá biá la tú ma xeetu que lá sacaza ma quí zabíí gueta tu yende cá xha beére ne guda huá ca lña biana chupánda dixta guini pá gotó.

Cuento escrito por: Joaquín Martínez Mendoza, 11 años, Juchitán de Zaragoza, Oaxaca. Tomado del libro *Las narraciones de niñas y niños indígenas*. Vol. II. México: SEP, Libros del Rincón, 2001.

Texto III

The Canterville Ghost

Mr Hiram B. Otis was a rich American from New York. He had come to live and work in England, but he did not want to live in London. He did not want live in the city. He wanted to live in the countryside outside London. Canterville Chase was a large and very old house near London. Lord Canterville, the owner, wanted to sell it. So Mr Hiram B. Otis visited Lord Canterville.

'I do not live in Canterville Chase,' Lord Canterville said to Mr Otis. 'I do not want to live there. The house has a ghost-The Canterville Ghost.'

'I come from Ameica,' said Mr Otis. 'America is a modern country. I don't believe in ghosts. Have you seen this Canterville Ghost?'

'No,' said Lord Canterville, 'but I have heard it at night.'

'I don't believe in ghosts,' Mr Otis said again. 'No one has found a ghost. No one has put a ghost in a museum. And you haven´t seen this ghost either.'

'But several members of my family have seen it,' said Lord Canterville. 'My aunt saw the ghost. She was so frightened that she was ill for the rest of her life. Also, the servants have seen it so they will not stay in the house at night. Only the housekeeper, Mrs Umney, lives in Caterville Chase. Mrs Umney lives there alone.'

'I want to buy the house,' said Mr Otis. 'I'll buy the ghost as well. Will you sell Canterville Chase? Will you sell the ghost?'

'Yes, I will,' said Lord Canterville. 'But, please remember, I told you about the ghost before you bought the house.'

Tomado de Wilde, Oscar, *The Canterville Ghost and Other Stories*/Oscar Wilde; Stephen Colbourn; ilus. Annabel Large. México: SEP/Macmillan, 2002.

a) Después de haber leído los tres textos, ¿qué letras suponen que se utilizan más en cada una de estas lenguas? ____________________

b) De acuerdo al texto que eligieron, en la siguiente tabla, anoten el número de veces que aparece cada letra.

A-a	B-b	C-c	Ch-ch	D-d	E-e	F-f	G-g	H-h	I-i
J-j	**K-k**	**L-l**	**Ll-ll**	**M-m**	**N-n**	**Ñ-ñ**	**O-o**	**P-p**	**Q-q**
R-r	**Rr-rr**	**S-s**	**T-t**	**U-u**	**V-v**	**W-w**	**X-x**	**Y-y**	**Z-z**

c) En el texto que eligieron, ¿cuál es la letra que más veces aparece? __________

d) ¿Esa letra es vocal o consonante? __________

e) ¿Cuáles fueron las 10 letras más utilizadas en el texto que eligieron? __________

f) ¿En qué porcentaje (respecto del total de letras del texto) se utiliza cada una de estas 10 letras? ____________________

g) En el siguiente espacio, tracen una gráfica en la que se muestren las 10 letras con mayor frecuencia. ¿Qué tipo de gráfica es más apropiada para mostrar estos datos?

____

II. Muestren y comparen las gráficas que construyeron en los equipo y contesten las siguientes preguntas:

a) Del texto en español, ¿cuál es la letra que más se utiliza y en qué porcentaje?

____

b) Del texto en inglés, ¿cuál es la letra que más se utiliza y en qué porcentaje?

____

c) Del texto en zapoteco, ¿cuál es la letra que más se utiliza y en qué porcentaje?

____

d) Si comparamos los resultados, ¿en qué texto se utilizan más las vocales? _______________ y ¿cuál es la vocal que más se utiliza? _____________________

e) ¿Cuál es la consonante que más se utiliza en los tres textos? __________________

f) ¿Se confirmó la suposición que hicieron en cuanto a las letras que se utilizan más en cada lengua? __________________

g) ¿Creen que la información obtenida de los tres textos es suficiente para afirmar que si se toma un fragmento de cualquier otro texto escrito en español, inglés o zapoteco, la letra que más veces aparece es la misma? _________ ¿Por qué? ____

III. Ahora prueben la afirmación que hicieron para el caso de español. Cada equipo deberá seleccionar un fragmento de máximo 10 renglones de alguno de los siguientes textos que se indican.

- Texto científico, por ejemplo, de su libro de **Ciencias**.
- Novela, por ejemplo, de algún título de la Biblioteca del Aula.
- Poesía, por ejemplo, de su libro de **Español**.
- Texto técnico, por ejemplo, de algún manual o instructivo.

a) En la siguiente tabla, anoten el número de veces que aparece cada letra de acuerdo al texto que eligieron.

A-a	B-b	C-c	Ch-ch	D-d	E-e	F-f	G-g	H-h	I-i
J-j	**K-k**	**L-l**	**Ll-ll**	**M-m**	**N-n**	**Ñ-ñ**	**O-o**	**P-p**	**Q-q**
R-r	**Rr-rr**	**S-s**	**T-t**	**U-u**	**V-v**	**W-w**	**X-x**	**Y-y**	**Z-z**

b) ¿Las letras más utilizadas en el texto que eligieron son las mismas que las más utilizadas en el primer texto en español (texto I: Cuento del tonto que comió pollo)? ____________

c) Si su respuesta es no, anoten las 10 letras que más se utilizan en este último texto.

____

d) Tracen una gráfica en la que sea posible comparar las frecuencias de las 5 letras más utilizadas en cada texto.

e) ¿La letra que tiene la mayor frecuencia en uno y otro texto es la misma?

____

f) Comparen sus gráficas con las gráficas de los otros equipos y describan qué sucede, si las 5 letras con mayor frecuencia son las mismas o no.

g) De acuerdo con los resultados obtenidos en todas las gráficas, ¿cuál es la letra que más se utiliza? ______________________________

h) Con base en los resultados que obtuvieron, ¿consideran que podría afirmarse que esa letra es la que más se utiliza en español? ¿Por qué? ____________

____

____

SESIÓN 3

¿QUÉ CANTIDAD DE AGUA CONSUMEN DIARIAMENTE LOS ALUMNOS DE TERCER GRADO?

>>> Para empezar

El agua que proviene de los alimentos que comemos y de los líquidos que bebemos constituye casi la totalidad del agua diaria que utiliza nuestro organismo. En general, se recomienda consumir 2 ℓ de agua diariamente.

Internacional Life Sciences Institute (ILSI) es una organización científica no lucrativa que promueve el entendimiento y solución de problemas de interés común en las áreas de nutrición, toxicología, alimentos y seguridad ambiental. En 2004, el ILSI de México, A.C. publicó el documento titulado "Hidratación: líquidos para la vida", en el que se presentan recomendaciones actuales para el consumo de agua, con especificaciones de acuerdo con la edad y el sexo.

>>> Consideremos lo siguiente

¿Conoces qué cantidad de agua consumes diariamente? ¿Es la cantidad recomendada? ¿Y tus compañeros saben si están consumiendo una cantidad de agua adecuada? ¿Quiénes consumen más agua, los varones o las mujeres del grupo? ¿Cómo podrías recopilar información para conocer qué cantidad de agua estás consumiendo?

>>> Manos a la obra

I. Discutan las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo podrían averiguar la cantidad de agua que consumen sus compañeros de clase? Es decir, ¿será suficiente con preguntar cuántos vasos con agua toman al día?

¿Por qué? ____________________

b) ¿Qué unidad de capacidad será conveniente utilizar para registrar los datos que obtengan de las respuestas de los compañeros? ____________________

c) Si alguien consume un refresco de 375 ml, ¿está consumiendo agua? __________

d) ¿Comes consomé o sopa aguada diariamente? __________

e) ¿Cómo medirán la cantidad de agua que se consume en una sopa aguada o consomé? ____________________

En el documento "Hidratación: líquidos para la vida" se incluye el contenido de agua de algunos alimentos y bebidas que se consideran son de consumo habitual. Esta información se encuentra en el anexo 2 **Ingestión de agua a partir de alimentos y bebidas consumidos frecuentemente**, consúltenla y acuerden una manera en que podrían utilizarla para determinar, aproximadamente, la cantidad de agua que consumen diariamente.

Anótenlo en las siguientes líneas. ______________________________

____

____

f) Una vez que decidan la forma en que recopilarán los datos, será conveniente organizarlos y clasificarlos, ¿qué tipo de tabla es más conveniente utilizar para mostrar los resultados de cada pregunta que realicen? ______________ Y, ¿qué tipo de gráfica es más conveniente utilizar? ______________

g) ¿Cuál es el consumo promedio (media) diario de agua a través de los alimentos entre tus compañeros? ______________________________

h) ¿Cuál es el consumo diario de agua más frecuente (moda) entre tus compañeros?

____

i) Una vez que han obtenido los valores del consumo promedio y del consumo diario más frecuente de agua de los alumnos de su grupo, ¿se confirma la suposición que hicieron en cuanto si la cantidad promedio de agua que consumen es la adecuada? ______________________

j) Escriban en sus cuadernos sus conclusiones sobre los resultados que obtuvieron en este estudio sobre el consumo diario de agua entre tus compañeros. Deberán incluir las tablas o gráficas que elaboraron para mostrar sus resultados.

II. En el documento "Hidratación: líquidos para la vida", también, se incluye la siguiente tabla que muestra las recomendaciones para consumo de agua diario de varones y mujeres de 4 a 18 años.

Consumo de agua total diario(ml/día)

Sexo/edad	Media
Ambos de 4 a 8 años	1 779
Varones de 9 a 13 años	2 535
Mujeres de 9 a 13 años	2 240
Varones de 14 a 18 años	3 400
Mujeres de 14 a 18 años	2 498

Fuente: FNB 2004

a) Reorganicen los resultados que obtuvieron clasificando por separado las respuestas que dieron los varones y las mujeres, ¿cuál es el consumo promedio (media) diario de agua entre los varones del grupo? ______________________________
¿Y cuál es el consumo promedio (media) diarios de agua entre las mujeres del grupo? ______________________________

b) Comparen los resultados obtenidos en el inciso anterior con los que se muestran en la tabla. En el caso de los varones, ¿cuál consumo es mayor, el que muestra la tabla para varones de 14 a 18 años o el de los compañeros de grupo? __________

c) Y al comparar la media de los varones de 9 a 13 años con la media de tus compañeros, ¿cuál es mayor? ______________________

d) En el caso de las mujeres, ¿qué ocurre? Anoten los comentarios en sus cuadernos.

e) ¿Con los resultados que obtuvieron, se confirmó lo respondido a las preguntas del apartado *Consideremos lo siguiente*? ______________________________________

____

>>> Lo que aprendimos

I. Seleccionen una de las siguientes preguntas para investigar, o bien realicen el estudio sobre algún otro asunto que el grupo considere más interesante.

- [ ] ¿Cuál es el grado de ansiedad de las personas?
- [ ] ¿Cuál es la estatura de los estudiantes de tu escuela?
- [ ] ¿Cuáles son las aptitudes de los adolescentes?
- [ ] ¿Cuáles son los alimentos que consumen los adolescentes en la comida?

Otra problemática: ____

____

____

a) Determinen qué grupo o población deberá ser considerado para realizar el estudio.

____

b) Elaboren la encuesta que utilizarán para recopilar los datos en su cuaderno. Recuerden que es importante reflexionar sobre el tipo de preguntas que se plantearán y las posibles respuestas que se obtendrán.

c) Apliquen la encuesta y clasifiquen las respuestas obtenidas. ¿Qué tipo de representación gráfica o tabular utilizarán? ¿Por qué?

d) Escriban las conclusiones que obtengan y preséntenlas a todos sus compañeros.

II. Seleccionen uno de los siguientes experimentos y realícenlo con los compañeros. Averiguar:

- [ ] El tiempo de duración de una vela de cera líquida y el de una vela normal.
- [ ] El número de cerillos de madera defectuosos en una caja que contiene 100 cerillos.

a) ¿Cuántos ensayos o extracciones realizarán? ____________________

b) ¿Qué tipo de tabla utilizarán para registrar los datos o resultados que obtengan?

____

c) ¿Qué tipo de representación gráfica utilizarán? ____________ ¿Por qué?

____

d) ¿Qué tipo de medida de tendencia central se podría utilizar para resumir los resultados del experimento? ____________________

e) Escriban en su cuaderno las conclusiones que obtengan y preséntenlas a todos sus compañeros.

>>> Para saber más

Sobre cómo elaborar una encuesta, consulten:
http://www.encuestafacil.com
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Elijan el icono Diseña y paso a paso podrán elaborar una encuesta.

Sobre algunos estudios estadísticos, consulten:
http://matematicas.mty.itesm.mx/uneest/home.htm
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Ruta: Servicios → Ratings de Radio en Monterrey (Presentación en Power Point), Contenido del Reporte
Tecnológico de Monterrey.


A'
B'
C'
E'
D'

BLOQUE 2

Ecuaciones no lineales

En esta secuencia resolverás problemas mediante el planteamiento y solución de ecuaciones de segundo o tercer grado.

SESIÓN 1

EL NÚMERO SECRETO

>>> Para empezar

En **Matemáticas I** y **II** aprendiste a resolver problemas y ecuaciones lineales con una incógnita y con dos. Algunas de esas ecuaciones tienen sólo una solución, por ejemplo: $2x + 3 = 8$. Otras tienen una infinidad de soluciones, tal como: $x + y = 10$.

En esta secuencia estudiarás algunos problemas que pueden resolverse con ecuaciones que tienen dos soluciones, una solución o ninguna solución.

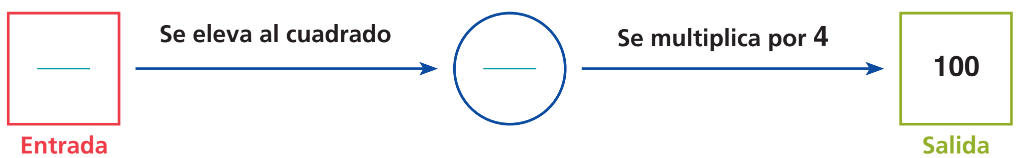
>>> Consideremos lo siguiente

Resuelve el acertijo:

Pensé un número y lo elevé al cuadrado. Al resultado lo multipliqué por 4 y al final obtuve 100. Si no pensé en el 5, ¿de qué número se trata? ____________

>>> Manos a la obra

I. Comparen sus soluciones y verifíquenlas usando el siguiente diagrama:



a) ¿Qué número podría ir en el círculo azul? ____________ ¿Hay otro? ____________

b) En el cuadrado rojo pueden ir dos números, encuéntrenlos. ____________

Comenten:

c) ¿Existe algún número negativo que elevado al cuadrado dé 25? ____________ ¿Cuál? ____________

d) ¿Por qué al elevar al cuadrado cualquier número (positivo o negativo) el resultado es siempre un número positivo? ____________

II. El producto de dos números enteros consecutivos es 552. ¿Cuáles son esos números?

__________ y __________

Comparen sus soluciones y verifíquenlas. Comenten:

a) Para resolver este tipo de problemas es necesario, frecuentemente, encontrar la ecuación primero la ecuación correspondiente. Si se representa con la letra x el número menor de los dos, ¿cuál de las siguientes ecuaciones corresponde al problema anterior?

- $(x)(x) = 552$
- $(x)(552) = y$
- $x(x + 1) = 552$
- $(x)(x) + 1 = 552$
- $x^2 + 1 = 552$

b) Hay una pareja de números enteros negativos consecutivos cuyo producto es igual a 552. Completen la siguiente tabla para encontrarla.

x	$x + 1$	$x(x + 1)$
–23	–22	(–23) (–22) =
–25		

Recuerden que:
(–23) + 1 = –22
(–25) + 1 = –24

c) ¿Cuáles son los números enteros negativos consecutivos que multiplicados dan 552?

__________ y __________

>>> A lo que llegamos

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación en la cual hay un término que tiene la incógnita elevada al cuadrado. Por ejemplo, las siguientes son ecuaciones cuadráticas:

$\underbrace{2x^2}_{\text{Término cuadrático}} = 18$ $\quad$ $\underbrace{x^2}_{\text{Término cuadrático}} + 3x - 2 = 0$ $\quad$ $\underbrace{x(x + 3)}_{\text{Producto que da un término cuadrático}} = -9$

Las ecuaciones cuadráticas pueden tener **dos soluciones**. Por ejemplo: $2x^2 = 18$, tiene dos soluciones: +3 y –3, porque al sustituir estos valores en la ecuación y efectuar las operaciones se obtiene 18.

Ecuación:	$2x^2 = 18$
Para $x = +3$:	$2(+3)^2 = 2(+9) = 18$
Para $x = -3$:	$2(-3)^2 = 2(+9) = 18$

III. Se tiene el siguiente acertijo: a tres veces el cuadrado de un número se le sumó 8. Como resultado se obtuvo 83.

Si el número se representa con la letra x, ¿cuál de las siguientes es la ecuación que corresponde al acertijo? Subráyala.

- $(3 + x)^2 + 8 = 83$
- $3x^2 + 8 = 83$
- $(3)(x^2)(8) = 83$

La ecuación que corresponde al acertijo tiene dos posibles soluciones.

a) Encuentra las dos soluciones de la ecuación que subrayaste: ________ y ________

b) Verifica las soluciones realizando con cada una de ellas las operaciones que se indican en el acertijo.

>>> Lo que aprendimos

Resuelve los siguientes problemas. Verifica las soluciones que obtengas.

1. El cuadrado de un número más 3 es igual a 84.

El número puede ser ____________ o ____________

2. Pedro pensó un número, lo elevó al cuadrado, al resultado le sumó 5 y obtuvo 1.

a) ¿Por qué crees que Pedro se equivocó al hacer alguna de las dos operaciones? ____________

b) Si Pedro pensó en el –2, ¿cuánto debió obtener de resultado? ____________

c) Si Pedro pensó en el +2, ¿cuánto debió obtener de resultado? ____________

d) ¿Hay algún número que elevado al cuadrado sea igual a –4? ____________ ¿Cuál? ____________

3. El largo de un terreno rectangular mide el doble del ancho. El terreno tiene 162 m^2 de área.

a) Encuentra una ecuación que exprese el problema anterior. Usa la letra x para representar al ancho. ______________________________

b) ¿Cuánto mide de ancho? ____________

c) ¿Cuánto mide de largo? ____________

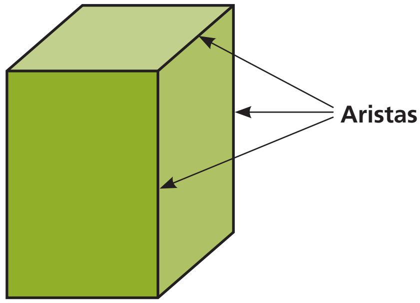
CUBOS, CUADRADOS Y ARISTAS

SESIÓN 2

>>> Para empezar

En un prisma los segmentos donde se unen dos caras se llaman *aristas*.

¿Cuántas aristas tiene el prisma cuadrangular de la derecha? ____________



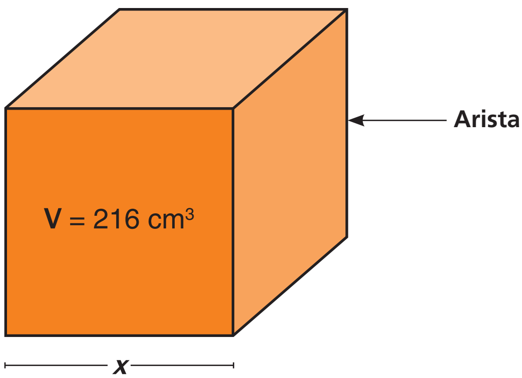
Un cubo es un prisma cuadrangular especial. Tiene 6 caras y todas son cuadrados congruentes.

Además, sabes que el volumen de un cubo cuya arista mide x es:

$$V = (x)\,(x)\,(x) = x^3$$

>>> Consideremos lo siguiente

¿Cuánto mide la arista de un cubo cuyo volumen es 216 cm^3? ____________



Comparen sus soluciones y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Revisa los procedimientos que siguieron algunos alumnos para resolver el problema.

PROCEDIMIENTO 1.

Arturo planteó la siguiente ecuación: $x^3 = 216$.

Luego, dividió 216 entre 3 y escribió: $x = \frac{216}{3}$.

Finalmente encontró que la arista mide 72 cm.

PROCEDIMIENTO 2.

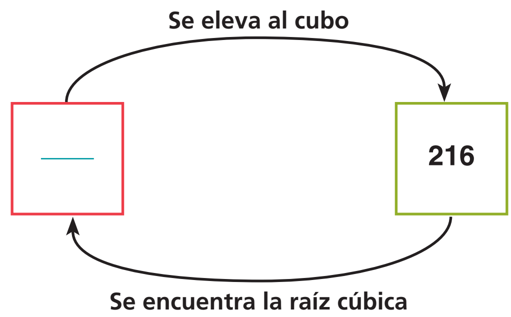
Rosa hizo la siguiente tabla:

Medida de la arista (cm)	Volumen (cm^3)
2	$2^3 = 8$
10	$10^3 = 1000$
5	$5^3 = 125$
8	$8^3 = 512$

Rosa dijo que la arista debía medir entre 5 cm y 8 cm.

PROCEDIMIENTO 3.

Lupe planteó la ecuación: $x^3 = 216$ y usó un diagrama para resolverla:



Lupe dice la solución es la raíz cúbica de 216, pero que no sabe calcularla.

¿Con cuál de los tres procedimientos estás de acuerdo? ___________

Comparen sus respuestas. Comenten:

a) ¿Cuál creen que sea la medida que encontró Rosa al continuar con su procedimiento? ___________

b) ¿Cuánto es la raíz cúbica de 216? ___________

II. Contesta lo que se te pide a continuación

a) Relaciona las columnas.

(____) Pensé un número y le resté 19 elevado al cubo. El resultado es igual a 8. ¿De qué número se trata?	(A) $x^3 - 19 = 83$
(____) Pensé un número y lo elevé al cubo. Al resultado le resté 19 y al final obtuve 8. ¿De qué número se trata?	(B) $x - 19^3 = 8$
(____) Pensé un número y le resté 19. Al resultado lo elevé al cubo y al final obtuve 8. ¿De qué número se trata?	(C) $x^3 - 19 = 8$
	(D) $(x - 19)^3 = 8$

b) Soluciona las ecuaciones que seleccionaste.

c) Verifica tus soluciones sustituyendo los valores en la siguiente tabla. Si lo consideras necesario, usa tu calculadora.

$x^3 - 19 = 83$	$x - 19^3 = 8$	$x^3 - 19 = 8$	$(x - 19)^3 = 8$
$(\_\_\_\_\_\_)^3 - 19 = 83$	$(\_\_\_\_\_\_) - 19^3 = 8$	$(\_\_\_\_\_\_)^3 - 19 = 8$	$(\_\_\_\_\_\_ - 19)^3 = 8$

Comparen sus respuestas y comenten cómo las encontraron.

III. Plantea una ecuación para resolver el siguiente acertijo. Usa x para representar el número buscado.

Pensé un número. Le sumé 5 y al resultado lo elevé al cubo. Al final obtuve –27. ¿Cuál es el número que pensé?

a) Ecuación: ______________________

b) Soluciona la ecuación que planteaste. Verifica tu solución sustituyendo el valor que encontraste.

Comparen sus respuestas y comenten cómo las encontraron.

>>> A lo que llegamos

Una **ecuación cúbica** es una ecuación en la cual hay un término que tiene la incógnita elevada al cubo. Por ejemplo, las siguientes son ecuaciones cúbicas:

$$\underbrace{2x^3}_{\text{Término cúbico}} = -128 \qquad \underbrace{x^3}_{\text{Término cúbico}} + 6x^2 = 16 \qquad (x+3)^3 = \underbrace{(x+3)\,(x+3)\,(x+3)}_{\text{Producto que da un término cúbico}} = -8$$

Para resolver la ecuación $2x^3 = -128$ podemos usar las operaciones inversas:

$$2x^3 = -128$$
$$x^3 = -\frac{128}{2}$$
$$x^3 = -64$$
$$x = \sqrt[3]{-64}$$
$$x = -4$$

>>> Lo que aprendimos

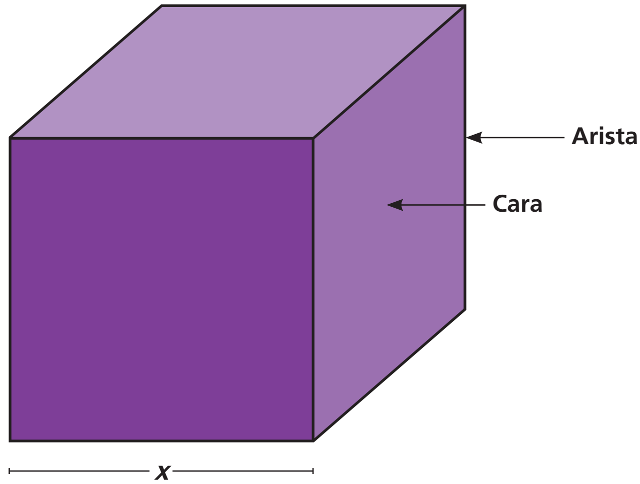
Resuelve los siguientes problemas.

1. A un número le resto 15, el resultado lo elevo al cubo y obtengo –8. ¿De qué número se trata?

   Ecuación: ____________

   Solución: ____________

2. El área total de las seis caras de un cubo es 60 cm².



a) Si la medida de una arista se representa con x, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite encontrar la medida de la arista? Subráyala.

- $x^3 = 60$
- $x^2 = 60$
- $6x^2 = 60$
- $6x = 60$

b) ¿Cuánto mide de área, una cara del cubo? ____________

c) ¿Cuánto mide la arista del cubo? $x =$ ____________

(Usa la calculadora para encontrar la solución.)

d) ¿Cuánto mide de volumen el cubo? ____________

MENÚ DE PROBLEMAS

SESIÓN 3

Resuelve los siguientes problemas. Usa la calculadora para realizar las operaciones cuando lo consideres necesario.

1. A un hojalatero le encargaron hacer un recipiente en forma de prisma cuadrangular de 3 dm de altura que tenga un volumen de 48 dm^3.

Para construir el recipiente usará una lámina de metal de forma cuadrada (figura A), luego cortará cuadrados en las esquinas y, finalmente, doblará los bordes para formar el recipiente.

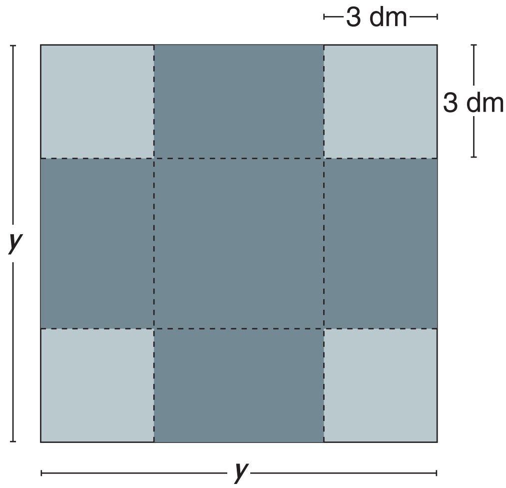
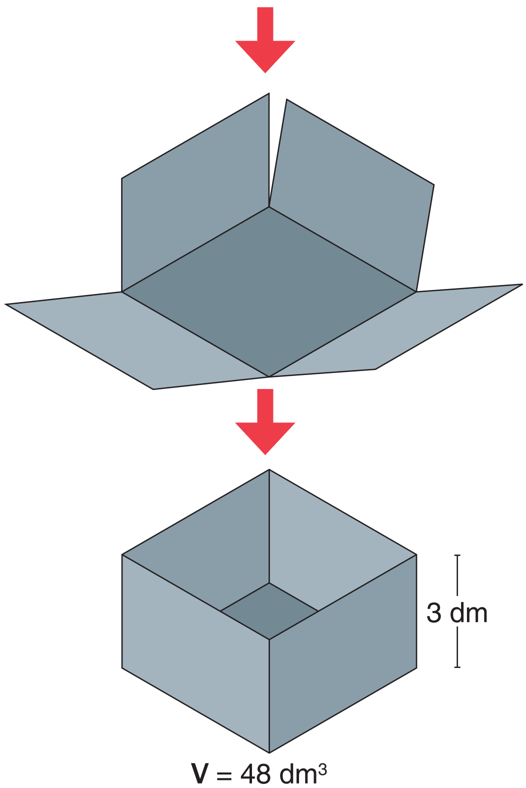


Figura A



Contesta las siguientes preguntas para encontrar las medidas de los lados de la lámina

a) ¿Qué forma geométrica tiene la base del prisma? ____________

b) La medida en decímetros del lado de la lámina es *y*. Subraya la expresión que representa la medida, en decímetros, de un lado de la base del prisma?

- y
- $y - 6$
- $y - 3$

c) ¿Qué expresión corresponde al área de la base del prisma? ____________

d) Subraya la ecuación que hay que resolver para encontrar la medida de un lado de la lámina metálica.

- $4(y - 6)^2 = 48$
- $6(y - 6)^2 = 48$
- $3(y - 6)^2 = 48$
- $3(y - 3)^2 = 48$

Recuerda que:

La fórmula para calcular el volumen de un prisma es:

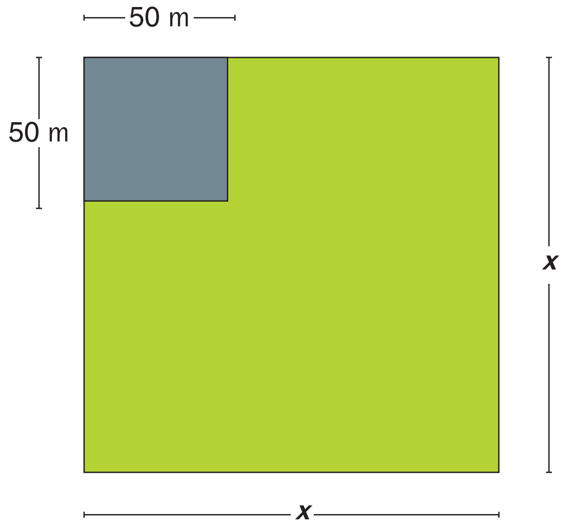
Área de la base × altura = volumen.

e) Hay dos números que solucionan la ecuación que corresponde al problema. Encuéntralos.

$y_1 =$ ____________, $y_2 =$ ____________

f) ¿Cuánto tiene que medir el lado de la lámina metálica? ____________

2. El parque de una colonia está ubicado en un terreno cuadrado. El estacionamiento ocupa una parte cuadrada del terreno de 50 m por lado y el resto es el jardín con un área de 14 400 m².



a) Plantea una ecuación que permita encontrar cuánto mide el lado x de todo el terreno.

____

b) ¿Cuáles son las dos soluciones de la ecuación que encontraste?

____________ y ____________

c) ¿Cuánto mide el lado del terreno del parque?

____

3. El cubo de un número más el mismo número es igual a 38. ¿De qué número se trata?

a) Encuentra una ecuación que permita encontrar el número. Usa n para representarlo.

Ecuación: ______________________________

n	n^3	$n^3 + n$
1	1	2
2	8	10
3	27	30
4	64	68

b) Usa la calculadora y la tabla de la izquierda para encontrar la solución de la ecuación

c) ¿Entre qué números enteros está la solución de la ecuación? ____________

d) ¿Qué número con una cifra decimal estará más cerca de la solución? ____________

e) ¿Qué número con dos cifras decimales estará más cerca de la solución? ________

4. Inventa un problema que se resuelva con la ecuación $\frac{x^2}{5} = 125$. Encuentra las dos soluciones de la ecuación y determina cuál de ellas es además solución del problema.

Presenten los problemas que inventaron. Comenten por qué algunas soluciones de la ecuación se descartan como solución del problema.

Inventen dos problemas para cada ecuación, resuélvanlas y determinen cuáles soluciones son aceptables para cada problema.

a) $6a^2 = 37.5$

b) $3n^2 - n = 102$

>>> Para saber más

Sobre ecuaciones cuadráticas, consulten:
http://www.emathematics.net/es/ecsegundogrado.php?a=1&tipo=numero
Ruta: Ecuación de segundo grado → Resolución cuando b=0
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].

SECUENCIA 9

Resolución de ecuaciones por factorización

En esta secuencia resolverás problemas y ecuaciones cuadráticas mediante *factorización*.

SESIÓN 1

¿CUÁNTO MIDEN LOS LADOS?

>>> Para empezar

En la secuencia 1 trabajaron con bloques algebraicos de área x^2, x y 1.

En esta sesión trabajaremos con bloques de área z^2, z y de 1 cm², como se muestra en la figura 1.

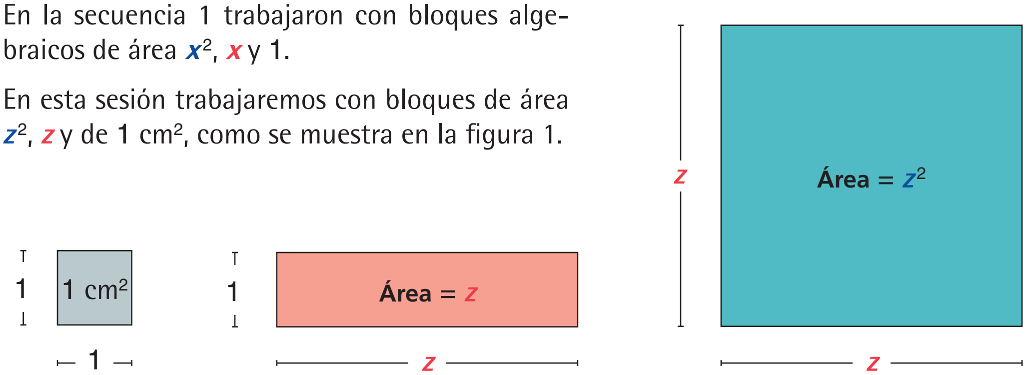


Figura 1

>>> Consideremos lo siguiente

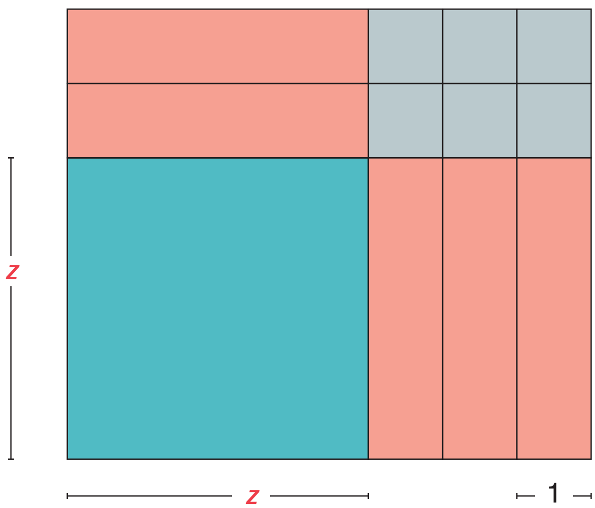


Figura 2

Con bloques como los anteriores se ha formado un rectángulo cuya área se representa por el trinomio $z^2 + 5z + 6$, como se muestra en la figura 2.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la base de este rectángulo?

____

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la altura de este rectángulo?

____

Si se sabe, además, que el área del rectángulo es 42 cm²:

c) Completen la ecuación que tienes que resolver para encontrar el valor de z, sin realizar medición alguna.

Ecuación: _______________ = 42

d) La ecuación que escribiste debe tener dos soluciones, ¿cuál de ellas no resuelve el problema? _______________

e) ¿Cuántos centímetros mide z? _______________

Comparen sus soluciones y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. En la secuencia 1 estudiaste cómo factorizar trinomios. Contesta las siguientes preguntas para factorizar $z^2 + 5z + 6$:

a) Encuentra algunas parejas de números enteros que multiplicados den 6 como resultado: _______ y _______, _______ y _______

b) ¿Cuál de esas parejas de números da 5 al sumarse? _______ y _______

c) ¿Cuáles son las dos expresiones algebraicas que multiplicadas dan $z^2 + 5z + 6$? Completa.

$$(z + \_\_\_\_\_)\ (z + \_\_\_\_\_) = z^2 + 5z + 6$$

Comparen y verifiquen sus soluciones haciendo las multiplicaciones respectivas.

Comenten:

a) ¿Cuánto tiene que valer z para que el área del rectángulo sea igual a 42 cm²?

$z =$ _______

b) Hay un valor negativo de z que es solución de la ecuación $(z + 3)(z + 2) = 42$. Encuéntrenlo completando la siguiente tabla.

z	$z + 3$	$z + 2$	$(z + 3)(z + 2)$
–1	2	1	2
–3	0	–1	0
–7	–4	–5	20

$z =$ _______

c) ¿Resuelve el problema este valor de z? _______ ¿Por qué? _______________

____

II. La figura 3 es una reducción, el área del rectángulo original era de 54 cm². ¿Cuánto medían su base y su altura?

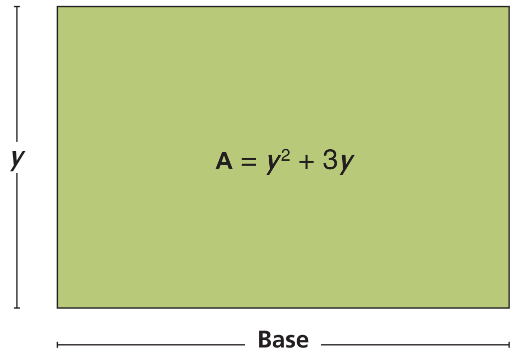


Figura 3

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la base de este rectángulo?

____

Recuerda que:

Para factorizar el binomio $x^2 + 6x$ se busca el factor común de ambos términos:

$$x^2 + 6x = x\,(x + 6)$$

Factor común

Para encontrar la longitud original del lado y, sin necesidad de medir, tienes que resolver la ecuación:

$$y^2 + 3y = 54$$

b) Completa la factorización del binomio $y^2 + 3y$, de la ecuación anterior.

$$(y)\ (\qquad\qquad)\ = 54$$

c) Existen dos parejas de números enteros que multiplicados dan 54 y que uno de ellos es tres unidades mayor que el otro. Completa las parejas escribiendo en primer lugar el número menor.

$$(\qquad)\ (\qquad) = 54 \qquad\qquad (\qquad)\ (\qquad) = 54$$

d) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $y^2 + 3y = 54$?

$y_1 =$ ____________ $y_2 =$ ____________

e) ¿Cuántos centímetros mide la altura del rectángulo? ________________________

f) ¿Cuántos centímetros mide su base? ____________________________

Comparen sus respuestas, verifiquen sus soluciones de la ecuación y comenten:

¿Cuál solución de la ecuación no resuelve el problema?

>>> A lo que llegamos

Una forma de resolver ecuaciones cuadráticas consiste en **factorizar** las expresiones algebraicas. Por ejemplo, la ecuación:

$$x^2 + 7x + 10 = 18$$

se puede resolver factorizando el trinomio $x^2 + 7x + 10$; la ecuación queda así:

$$(x + 5)(x + 2) = 18$$

Una manera de resolver esta ecuación factorizada consiste en buscar parejas de números que **multiplicados den 18** y que uno de ellos sea **tres unidades** menor que el otro.

En este caso, hay dos parejas de números que cumplen estas dos condiciones:

$$(3)(6) = 18 \quad \text{y} \quad (-6)(-3) = 18$$

Entonces, se tiene que: $(x + 2)(x + 5) = 18$

$(3)(6) = 18$

de donde $x = 1$, porque $x + 2 = 1 + 2 = 3$ y, $x + 5 = 1 + 5 = 6$

Además se tiene que: $(x + 2)(x + 5) = 18$

$(-6)(-3) = 18$

de donde $x = -8$, porque $x + 2 = -8 + 2 = -6$ y, $x + 5 = -8 + 5 = -3$

>>> Lo que aprendimos

1. Soluciona las siguientes ecuaciones mediante factorización. Comprueba tus soluciones sustituyéndolas en la ecuación y efectuando las operaciones.

a) $x^2 - 2x = 8$ Comprobación:

x_1 = ________ x_2 = ________

b) $x^2 - 4x + 4 = 81$ Comprobación:

x_1 = ________ x_2 = ________

2. Resuelve los siguientes problemas. Plantea y resuelve una ecuación cuadrática para cada uno de ellos.

a) El área de un rectángulo está dada por la expresión algebraica $x^2 - 6x + 8$. Además, también se sabe que el área es igual a 15 cm. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

Ecuación: ______________________________

Largo: ____________ Ancho: ____________

b) El área de un rectángulo está dada por la expresión algebraica $x^2 + 9x + 18$. Además, también se sabe que el área es igual a 40 m². ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

Ecuación: ______________________________

Largo: ____________ Ancho: ____________

SESIÓN 2

LOS FACTORES DE CERO

>>> Para empezar

Encuentren distintas parejas de números que den cero al multiplicarse.

_________ × _________ = 0 _________ × _________ = 0

_________ × _________ = 0 _________ × _________ = 0

_________ × _________ = 0 _________ × _________ = 0

_________ × _________ = 0 _________ × _________ = 0

¿Habrá alguna pareja de números DISTINTOS DE CERO que den cero al multiplicarse?

_________ ¿Cuál? ____

Lean y comenten la siguiente información.

Si el producto de dos números es igual a cero, al menos uno de los dos tiene que ser igual a cero.

Hay dos números que solucionan la siguiente ecuación:

$$(x-6)(x-2)=0$$

a) ¿Cuánto tiene que valer x para que $x-6$ sea igual a 0? $x=$ ________

b) ¿Cuánto tiene que valer x para que $x-2$ sea igual a 0? $x=$ ________

Comparen sus respuestas. Verifíquenlas sustituyendo sus valores en la ecuación original.

>>> Consideremos lo siguiente

Plantea y resuelve una ecuación para encontrar los números que cumplan la siguiente condición:

Al elevar el número al cuadrado y restarle 8 se obtiene el mismo resultado que al multiplicar el número por 2.

Ecuación: ____________________________

Números que solucionan la ecuación: ____________________________

Comparen y verifiquen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Con relación al problema anterior, contesta las siguientes preguntas.

a) Si el número que se busca se representa con la letra x, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al enunciado: *Elevar el número al cuadrado y restarle 8*? Subráyala.

- $(x-8)^2$
- x^2-8
- $x^2\,(8)$

b) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde al problema? Subráyala.

- $(x-8)^2=2x$
- $x^2-8=2x$
- $8x^2=2x$

Comparen sus respuestas.

II. Revisa los procedimientos que siguieron algunos alumnos para resolver la ecuación que corresponde. Contesta lo que se pregunta respecto a cada procedimiento.

PROCEDIMIENTO 1

Arturo factorizó la ecuación de la siguiente manera:

$$x^2 - 8 = 2x$$

$$(x - 2)(x - 4) = 2x$$

Y dijo que los números 2 *y* 4 *cumplían la condición del problema.*

a) ¿Estás de acuerdo con la factorización que hizo Arturo? ______ ¿Por qué? ______

____

b) Para verificar la factorización que encontró Arturo, realiza la multiplicación de los factores:

$(x - 2)(x - 4) =$ ____________________

PROCEDIMIENTO 2

Recuerda que:

Para factorizar un trinomio como $x^2 + 5x - 24$, *hay que buscar dos números que multiplicados den* -24 *y sumados den* $+5$.

$(+8)(-3) = -24$

$(+8) + (-3) = +5$

$x^2 + 5x - 24 = (x + 8)(x - 3)$

Lupe dijo que no podía factorizar la ecuación como estaba. Restó $2x$ *de ambos lados de la ecuación y obtuvo lo siguiente:*

$$x^2 - 8 = 2x$$

$$x^2 - 2x - 8 = 2x - 2x$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

c) ¿Cuál de las siguientes es factorización de $x^2 - 2x - 8$? Subráyala.

- $x^2 - 2x - 8 = (x - 2)(x - 4)$
- $x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$
- $x^2 - 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$

d) En la ecuación $x^2 - 2x - 8 = 0$, sustituye el trinomio por su factorización y resuelve la ecuación que resulte.

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

(________) (________) = 0

$x_1 =$ ________, $x_2 =$ ________

Comparen y verifiquen sus respuestas sustituyendo en la ecuación original. Comenten: ¿cuáles son los números que cumplen la condición del problema?

____

>>> A lo que llegamos

Una **ecuación cuadrática factorizada e igualada a cero** se resuelve al encontrar los números que hacen valer cero a los factores. Por ejemplo, la ecuación cuadrática factorizada:

$$(x-7)(x+11)=0$$

se soluciona al encontrar los valores de x que hacen valer cero a los factores, es decir:

$$x-7=0 \quad \text{y} \quad x+11=0$$

de donde se obtiene: $x_1 = 7$ y $x_2 = -11$

Entonces 7 y –11 son soluciones porque al sustituirlos en la ecuación y efectuar las operaciones, se obtiene 0.

Sustituyendo 7: $(7-7)(7+11)=(0)(18)=0$

Sustituyendo –11: $(-11-7)(-11+11)=(-18)(0)=0$

III. Resuelve las siguientes ecuaciones. Cuando sea necesario, iguala a cero y factoriza.

a) $x^2 + 10x + 21 = 0$

b) $z^2 = -6z - 9$

c) $y^2 - 6 = -y$

>>> Lo que aprendimos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones factorizando. Cuando sea conveniente, transforma la ecuación de manera que esté igualada a cero.

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$

b) $12z - 36 = z^2$

c) $y^2 + 7y = 18$

2. Resuelve el siguiente problema mediante una ecuación.

¿Qué número elevado al cuadrado es igual a tres veces el mismo número?

Ecuación: ________

El número es: ________ o ________

SESIÓN 3

EL ADORNO

>>> Para empezar

Una ecuación cuadrática está en su **forma general** cuando un lado de la igualdad es 0 y en el otro lado se han efectuado todas las operaciones indicadas y los términos ya no pueden reducirse. Ejemplos de ecuaciones cuadráticas en su forma general son:

- $x^2 - 6x - 7 = 0$
- $x^2 - 6x = 0$

Establezcan la forma general de la ecuación $2x^2 + 6(x + 1) - 3x = 6$:

_______________ = 0

En esta sesión resolverán problemas planteando las formas generales de las ecuaciones correspondientes.

>>> Consideremos lo siguiente

Luis adornó el borde de un dibujo como se muestra en la figura 4. El área cubierta por el adorno es de 252 cm².

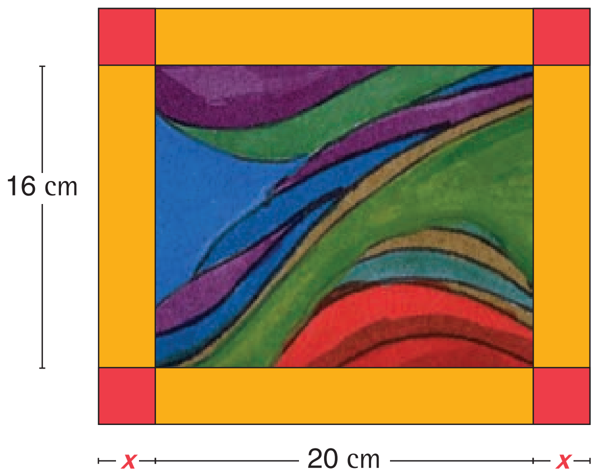


Figura 4

a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a este problema? Subráyala.

- $4x^2 + 36x = 252$
- $4x^2 + 36 = 252$
- $4x^2 + 72x = 252$
- $4x^2 + 72 = 252$

b) ¿Cuántos centímetros mide el ancho del adorno?

____

Comparen sus soluciones y comenten cómo encontraron el valor de x.

>>> Manos a la obra

I. A continuación se presenta una forma de resolver la ecuación correspondiente al problema del adorno. Efectúa las siguientes actividades:

a) Establece la forma general de la ecuación.

_______________ = 0

b) Todos los términos de esta ecuación se pueden dividir entre el mismo número: 4. Simplifica la ecuación dividiendo entre 4.

_______________________ = 0

c) Factoriza la ecuación.

(   )(   ) = 0

d) Encuentra los valores de x que hacen cero los factores:

_______ = 0   y   _______ = 0

e) Las soluciones de la ecuación son:

x_1 = _______   y x_2 = _______

f) ¿Cuál de las dos soluciones de la ecuación no puede ser la medida del lado de un cuadrado rojo de la figura 4? __________________ ¿Por qué? __________

____

Comparen y verifiquen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

Para resolver una ecuación cuadrática usando la factorización es conveniente pasarla primero a su **forma general**.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 3x - 5 = 35$ se puede resolver de la siguiente manera:

- Se pasa la ecuación a su forma general: $x^2 - 3x - 40 = 0$
- Se factoriza: $(x - 8)(x + 5) = 0$
- Se encuentran los valores de x que hacen cero los factores: $x_1 = 8,\ x_2 = -5$
- Se verifican las soluciones sustituyendo en la ecuación original:

  Para $x_1 = 8$: $(8)^2 - 3(8) - 5 = 64 - 24 - 5 = 35$

  Para $x_2 = -5$: $(-5)^2 - 3(-5) - 5 = 25 + 15 - 5 = 35$

II. Resuelve y verifica en tu cuaderno las siguientes ecuaciones. Usa el procedimiento de factorización.

a) $x^2 + 3x = 10$

b) $3x^2 = -6x$

Comparen y verifiquen sus respuestas.

>>> Lo que aprendimos

1. La expresión $y^2 + 2y + 2$ representa el área de la figura 5.

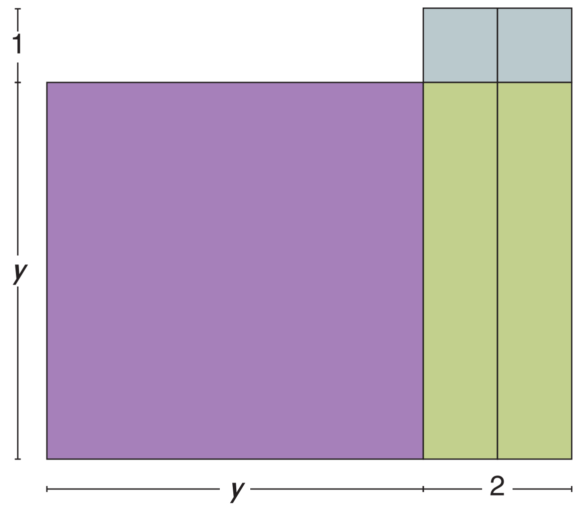


Figura 5

a) Plantea una ecuación para encontrar el valor de y si el área de toda la figura es de 26 cm².

Ecuación: ______________________ = 26

b) Para resolver la ecuación que planteaste, primero pásala a su forma general:

Forma general: ______________________ = 0

c) Resuelve la ecuación mediante factorización:

(   ) (   ) = 0

y_1 = ________ y_2 = ________

d) Verifica los valores que encontraste sustituyendo en la ecuación original.

e) ¿Cuántos centímetros mide el lado del cuadrado morado de la figura 4?

____

2. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones. Usa el procedimiento de factorización.

a) $x^2 = -5x$

b) $3x^2 + 5x = 2x^2 + 7x$

c) $2x^2 + 6(x + 1) - 3x = 6$

SESIÓN 4

APLIQUEMOS LO APRENDIDO

>>> Lo que aprendimos

1. Plantea una ecuación para modelar los siguientes problemas y aplica la factorización para resolverla.

a) ¿Cuántos metros mide el largo del terreno que se muestra en la figura 6?

Ecuación: ____________________________

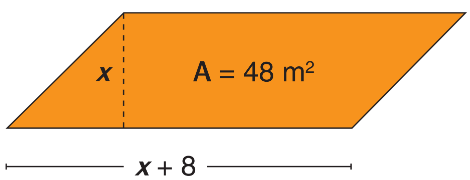


Figura 6

El largo del terreno mide : ___________ m

b) Un número elevado al cuadrado menos cinco veces el número es igual a 14. ¿De qué número se trata? ______________________

Ecuación: ______________________

2. Resuelve y comprueba las siguientes ecuaciones. Usa el procedimiento de factorización.

a) $3x^2 - 15x = 0$

b) $x^2 + 4x = 7x$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $x^2 - 3x = 10$

3. Completa la siguiente tabla.

Soluciones de la ecuación	Ecuación factorizada	Ecuación en su forma general
$x_1 = 0 \quad x_2 = 5$	$x(x - 5) = 0$	$x^2 - 5x = 0$
$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$		
$x_1 = 2 \quad x_2 = -3$	$(x - 2)(x + 3) = 0$	$x^2 + x - 6 = 0$
$x_1 = 1 \quad x_2 = -4$		
$x_1 = 5 \quad x_2 = 5$		
$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$		
		$x^2 - 100 = 0$

4. Escribe un problema que se resuelva con las siguientes ecuaciones. En cada caso, resuelve y comprueba resultados.

a) $2x^2 = 8x$

b) $x^2 + 4x = 28$

>>> Para saber más

Sobre ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, consulta:
http://www.emathematics.net/es
Ruta: 3º E.S.O. → Ecuación de segundo grado → problemas
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].

SECUENCIA 10

Figuras semejantes

En esta secuencia aprenderás cuáles son las condiciones que deben tener dos figuras para que se diga que son semejantes.

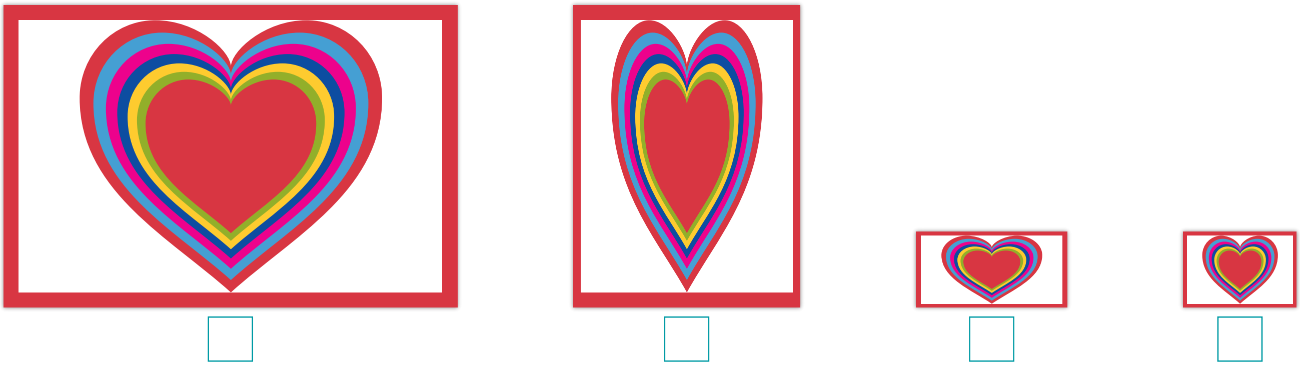
SESIÓN 1

UN CORAZÓN MUY ESPECIAL

>>> Para empezar

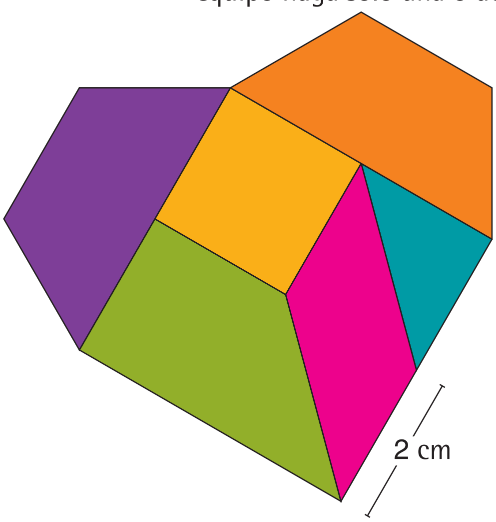
Marca con ✗ los dibujos que no estén a escala respecto al siguiente:

¿En qué te fijaste para elegir los dibujos que tachaste?



>>> Consideremos lo siguiente

Usen sus instrumentos geométricos para trazar en hojas blancas tamaño carta las piezas de este rompecabezas; tendrán que hacerlo a escala y de manera que la parte que mide 2 cm deberá medir 11 cm. Se deben repartir las piezas para que cada integrante del equipo haga sólo una o dos.



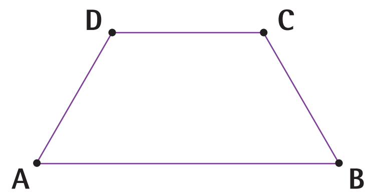
a) Cuando todos hayan terminado la o las piezas que le tocaron, armen con ellas el corazón.

b) Si el corazón no se puede armar, revisen cada una de las piezas y vean si realmente están hechas a escala respecto a las del dibujo del rompecabezas; si no, corrijan lo que sea necesario hasta que puedan armar el corazón.

Comenten con su grupo cómo trazaron el rompecabezas y las dificultades que tuvieron al hacerlo.

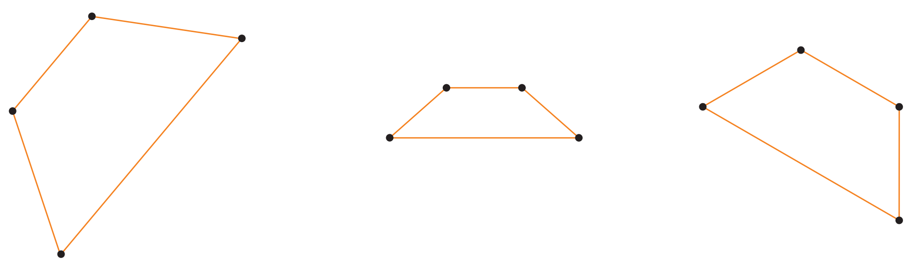
>>> Manos a la obra

I. La siguiente es una de las piezas del rompecabezas:



Con sus instrumentos geométricos tomen las medidas necesarias para realizar lo que se pide.

a) ¿Cuál de los siguientes trapecios está hecho a escala respecto al anterior? Identifiquen, en el trapecio a escala, los vértices correspondientes a **A**, **B**, **C**, **D** y anótenles **A'**, **B'**, **C'** y **D'** respectivamente.



b) ¿En qué se fijaron para elegir el trapecio hecho a escala? ____________________

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

c) Midan los segmentos y luego calculen las siguientes razones o cocientes:

$\frac{AB}{A'B'}$ = $\frac{BC}{B'C'}$ = $\frac{CD}{C'D'}$ = $\frac{DA}{D'A'}$ =

d) ¿Cómo son entre sí los cocientes: iguales o diferentes? ____________________

¿Qué significa esto? ____

e) Anoten la medida de los ángulos interiores:

$\measuredangle$**A** = _______ $\measuredangle$**B** = _______ $\measuredangle$**C** = _______ $\measuredangle$**D** = _______

$\measuredangle$**A'**= _______ $\measuredangle$**B'** = _______ $\measuredangle$**C'** = _______ $\measuredangle$**D'** = _______

Recuerden que:

En estas figuras, el lado AB es el correspondiente del lado A'B'; el lado BC es el correspondiente del lado B'C'; etcétera.

Consideren que, debido a la imprecisión de los instrumentos de medición, las medidas pueden variar ligeramente.

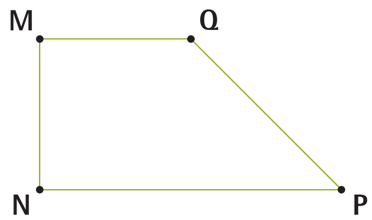
Si los lados que forman el ángulo A, son correspondientes a los lados que forman el ángulo A', entonces podemos decir que el ángulo A es el correspondiente del ángulo A'.

f) ¿Cuál es el ángulo correspondiente al ∡**B**? ____________ , ¿ de ∡**C**? __________

¿y al ∡**D**? _______

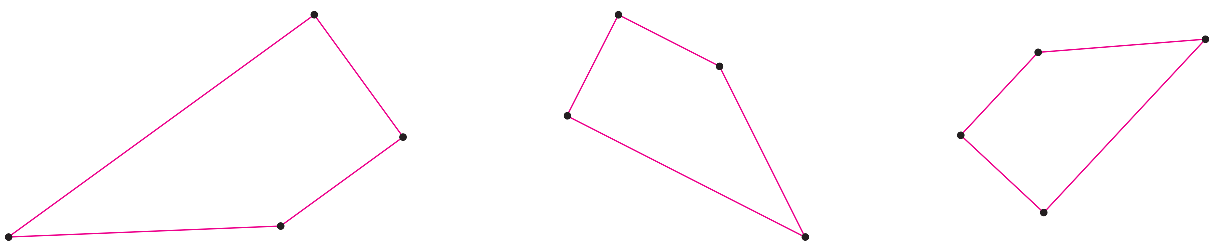
g) ¿Cómo son entre sí los ángulos correspondientes de ambas figuras? ___________

II. Este trapecio es otra de las piezas del rompecabezas:



Con sus instrumentos geométricos tomen las medidas necesarias para realizar lo que se pide.

a) ¿Cuál de los siguientes trapecios está hecho a escala del anterior? Identifiquen, en el trapecio a escala, los vértices correspondientes a **M**, **N**, **P**, **Q** y anótenles **M'**, **N'**, **Q'** y **P'** respectivamente.



b) En la actividad **I** encontraron que los lados correspondientes de dos figuras a escala son proporcionales; verifiquen que el trapecio que eligieron cumple esta condición.

c) Midan los ángulos internos del trapecio **MNPQ** y verifiquen que son iguales a sus correspondientes ángulos internos en el trapecio **M'N'P'Q'**.

III. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Lean y comenten con ayuda de su profesor la siguiente información y resuelvan lo planteado en la actividad.

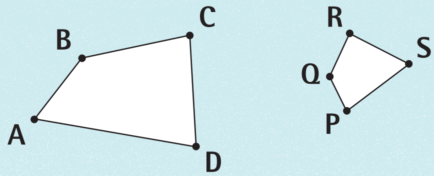
>>> A lo que llegamos

En matemáticas, cuando dos polígonos están hechos a escala se dice que son polígonos semejantes. Los polígonos semejantes cumplen con dos condiciones:

a) Las medidas de los lados de uno de los polígonos son proporcionales a las medidas de los lados del otro.

b) Sus ángulos correspondientes son iguales.

Por ejemplo, el polígono **PQRS** es semejante al polígono **ABCD**:



a) Las medidas de los lados del polígono **ABCD** son proporcionales a las medidas de los lados del polígono **PQRS**.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{SP}} = 2$$

El número **2** es la **razón de semejanza** del polígono mayor con respecto al menor.

b) Los ángulos correspondientes son iguales:

$\measuredangle A = \measuredangle P$ $\measuredangle B = \measuredangle Q$ $\measuredangle C = \measuredangle R$ $\measuredangle D = \measuredangle S$

IV. Verifiquen que las figuras que hicieron para el rompecabezas son semejantes a las del dibujo del apartado *Consideremos lo siguiente*, es decir, para cada una verifiquen que sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.

a) ¿Cuál es la razón de semejanza del rompecabezas que trazaron con respecto al dibujo? ________

b) ¿Cuál es la razón de semejanza del dibujo con respecto al rompecabezas? ________

APLICACIONES DE LA SEMEJANZA

SESIÓN 2

>>> Lo que aprendimos

1. Cada uno del equipo recorte en cartulina un triángulo cuyos ángulos midan 30°, 40° y 110°; puede ser del tamaño que deseen.

a) ¿Son semejantes los triángulos que construyeron? ________

b) Argumenten su respuesta:

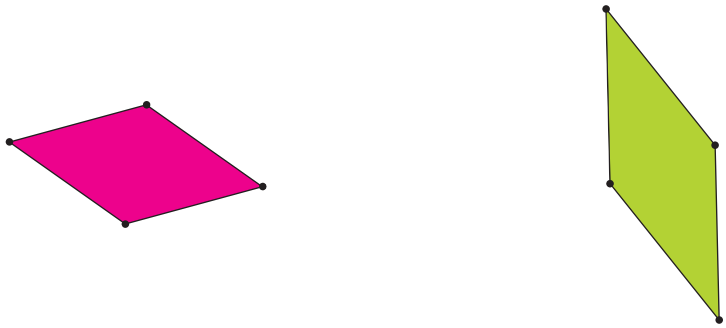
____

c) Midan los lados del triángulo que construyeron y los lados del triángulo que haya construido otro integrante del equipo; ¿cuál es la razón de semejanza entre estos dos triángulos? ________________________________

2. Todos los rectángulos tienen sus ángulos iguales a 90°. ¿Basta esta condición para afirmar que todos los rectángulos son semejantes? ________________

Argumenten su respuesta: ________________________________

3. Consideren los siguientes rombos:



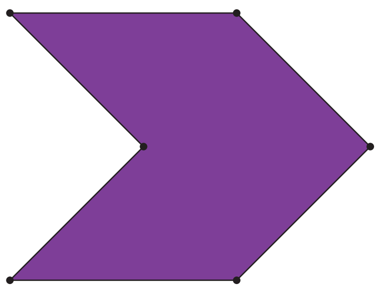
a) ¿Sus lados guardan la misma razón de semejanza? ______________________

b) ¿Son semejantes los rombos? __________

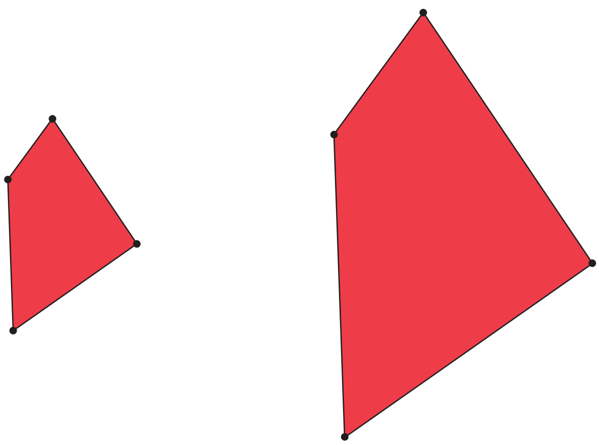
c) Argumenten sus respuestas: ____

____

4. Tracen en su cuaderno un polígono semejante al siguiente:



5. ¿Cuál es la razón de semejanza del polígono menor con respecto al mayor? _______



6. Tracen cinco rectángulos semejantes al rectángulo rojo, siempre con el lado más largo sobre el **eje *x*** y el más corto sobre el **eje *y***, y con uno de sus vértices en el origen.

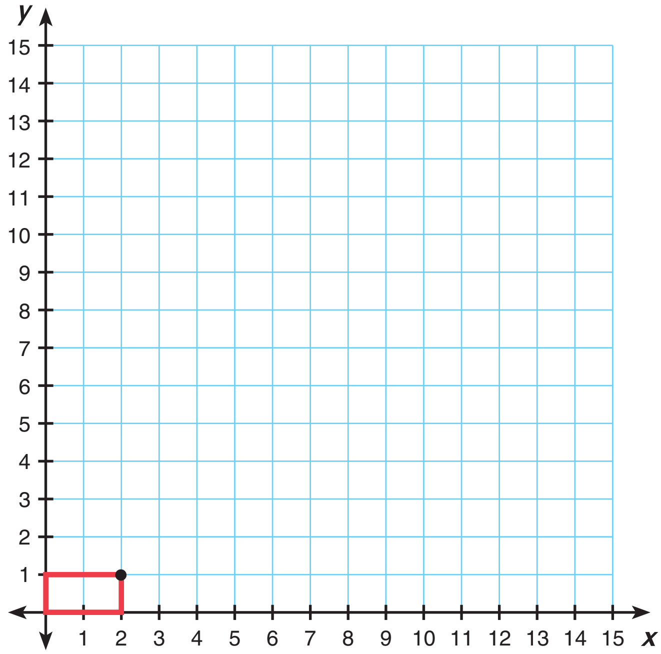
a) Marquen en todos los rectángulos el vértice opuesto al origen, todos estos vértices deben estar alineados; si no es así corríjanlos.

b) Tracen la línea que pasa por todos los vértices que marcaron.

c) ¿Cuál es la ecuación de esa línea recta?

____

d) A partir del resultado anterior anoten una manera para determinar si dos rectángulos son o no son semejantes.



7. Completen la siguiente tabla; en el caso de las afirmaciones falsas, den un ejemplo para demostrar su falsedad.

Afirmación	¿Es falso o verdadero?	Ejemplo
Todos los triángulos isósceles son semejantes		
Todos los triángulos equiláteros son semejantes		
Todos los cuadrados son semejantes		
Todas las figuras que son congruentes también son semejantes		
Todas las figuras que son semejantes también son congruentes		

Comparen con otros equipos los resultados que obtuvieron en los ejercicios anteriores y la manera en que lo determinaron.

La semejanza de figuras geométricas tiene muchas aplicaciones, por ejemplo, las fotografías, los planos de una casa, los mapas, las maquetas, las sombras que produce el sol o alguna fuente de luz...

>>> Para saber más

Consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Hernández Garcíadiego, Carlos. “Figuras semejantes”, “Dibujo a escala y figuras semejantes” en *La geometría en el deporte*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Semejanza de triángulos

En esta secuencia aprenderás los criterios de semejanza de triángulos y aplicarás la semejanza de triángulos para calcular distancias inaccesibles.

SESIÓN 1

EXPLORANDO LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

>>> Para empezar

En la secuencia 10 aprendiste que para que dos polígonos sean semejantes deben reunir dos condiciones. Anótalas:

____

____

____

____

Mide los lados de las figuras.

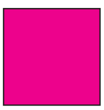


Figura A

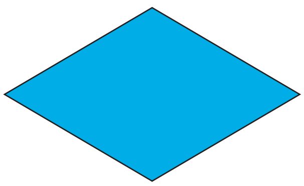


Figura B

¿Las medidas de los lados de la figura B son proporcionales a los de la figura A? ________ ¿Cómo lo sabes? ________________________

____

¿Son semejantes estas dos figuras? ________ ¿Por qué? ________

____

Figura C

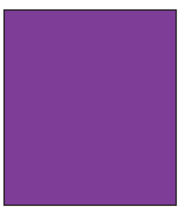


Figura D

¿Cuánto miden los ángulos de estos rectángulos? ______________

¿Son semejantes estos dos rectángulos? ______ ¿Por qué? ______

____

Habrás notado que cada pareja de figuras cumple sólo una de las condiciones que escribiste, pero no cumple la otra y, por eso, no son semejantes.

>>> Consideremos lo siguiente

Discutan y marquen con una ✓ en cuáles de los siguientes casos se obtienen necesariamente dos triángulos que son semejantes.

☐ **Caso 1.** En un triángulo, uno de sus lados mide 6 cm y uno de sus ángulos 60°; en el otro triángulo, el lado y el ángulo correspondientes miden 3 cm y 60°, respectivamente.

☐ **Caso 2.** Los lados de un triángulo miden 4 cm, 6 cm y 7 cm; los lados del otro triángulo miden 8 cm, 12 cm y 14 cm, y no se sabe nada de las medidas de los ángulos.

☐ **Caso 3.** Los tres ángulos de los dos triángulos miden 30°, 60° y 90°, y no se sabe nada de las medidas de los lados.

☐ **Caso 4.** Dos lados de un triángulo miden 4 cm y 6 cm, y el ángulo comprendido entre ellos mide 77°. En el segundo triángulo los lados correspondientes miden 8 y 12 cm, y el ángulo entre ellos mide 77°.

☐ **Caso 5.** Dos lados de un triángulo miden 4 cm y 6 cm, y dos lados del otro triángulo miden 8 cm y 12 cm.

☐ **Caso 6.** Los dos triángulos tienen un ángulo igual a 60°.

Organícense al interior del equipo para trazar en sus cuadernos los triángulos con las condiciones indicadas en cada uno de los incisos anteriores y verifiquen sus respuestas. En caso de que estén equivocadas, corrijan lo que sea necesario.

Comparen sus respuestas y argumentos con sus compañeros de grupo e identifiquen los tres casos en que los triángulos son semejantes.

SESIÓN 2

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS I

>>> Para empezar

En **Matemáticas II** aprendiste tres criterios de congruencia de triángulos, anótalos.

En el caso de la semejanza, ¿existirán criterios de semejanza de triángulos?; si piensas que sí, da al menos un ejemplo.

>>> Consideremos lo siguiente

Anoten ✓ a los que crean que son criterios para establecer que dos triángulos son siempre semejantes. Recuerden que para ser un criterio la o las condiciones deben garantizar que los triángulos siempre son semejantes.

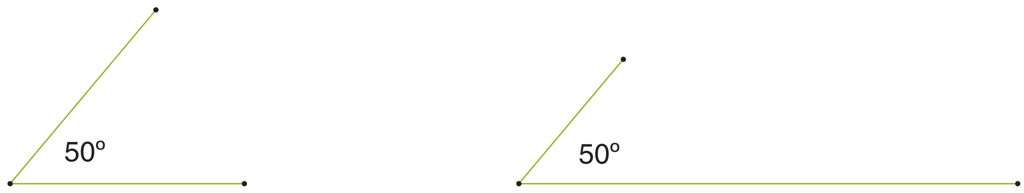
Dos triángulos son semejantes si:	¿Es un criterio de semejanza de triángulos?	Hagan un dibujo para ejemplificar su respuesta
Tienen igual uno de sus ángulos		
Sus lados correspondientes son proporcionales		
Sus ángulos correspondientes son iguales		
Dos lados correspondientes son proporcionales		

Comparen sus respuestas y argumentos con sus compañeros de grupo.

>>> Manos a la obra

En cada actividad pueden repartirse entre los miembros del equipo los trazos que se piden.

I. Se han empezado a trazar dos triángulos. El ángulo entre dos de sus lados mide 50°.



a) Terminen de trazar los triángulos.

b) ¿Son semejantes? ____________

c) Argumenten su respuesta: ____

____

____

II. Tracen en su cuaderno dos triángulos cuyos lados midan:

- 4 cm, 6 cm y 8 cm, para el triángulo A
- 2 cm, 3 cm y 4 cm, para el triángulo B

a) ¿Los lados del triángulo A son proporcionales a los del triángulo B? ____________

Argumenten su respuesta: ____

____

____

b) Midan los ángulos de los dos triángulos. ¿Qué notan? ____________________

c) ¿Son semejantes los dos triángulos? ____________

Argumenten su respuesta: ____

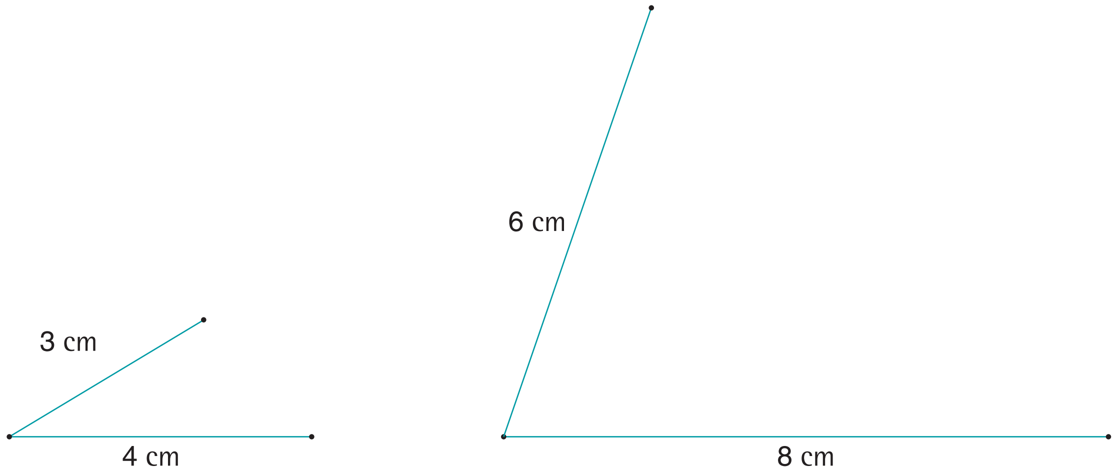
____

____

d) Construyan un triángulo cuyos lados sean proporcionales a los de los triángulos A y B. Midan sus lados. ¿Podrán construir un triángulo cuyos lados sean proporcionales a los lados de los triángulos A y B, y cuyos ángulos sean diferentes a los de estos triángulos?

____

III. En cada caso se tienen dos lados de un triángulo que no se ha terminado de trazar:



a) ¿Las dos medidas que se dan de un triángulo son proporcionales a las del otro? __________

b) Terminen de trazar los triángulos. ¿Son semejantes? __________ Argumenten su respuesta: ______________________________

IV. Tracen en su cuaderno dos triángulos A y B, de diferente tamaño pero cuyos ángulos midan 30°, 60° y 90°.

a) Midan sus lados, ¿son proporcionales los lados correspondientes? __________

Argumenten su respuesta: ______________________________

____

____

b) ¿Son semejantes los dos triángulos? __________

¿Cómo lo saben? ______________________________

____

____

c) Construyan un triángulo C, cuyos ángulos midan 30°, 60° y 90°. Midan los lados, ¿son proporcionales a los de los triángulos A y B?

d) ¿Podrán construir un triángulo cuyos ángulos midan 30°, 60° y 90°, y cuyos lados no sean proporcionales a los de los triángulos A y B? __________

Comparen sus respuestas y argumentos con sus compañeros de grupo.

>>> A lo que llegamos

En la secuencia 10 aprendieron que para que dos polígonos sean semejantes deben tener:

- Los lados correspondientes proporcionales.
- Los ángulos correspondientes iguales.

En el caso de los triángulos, los **criterios de semejanza** permiten fijarnos en **menos datos** para estar seguros de que los triángulos son semejantes.

Basta que se cumpla **sólo una** de las siguientes condiciones:

Sus lados correspondientes son proporcionales,

o bien:

Sus ángulos correspondientes son iguales.

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS II

SESIÓN 3

>>> Consideremos lo siguiente

Anoten ✓ al que crean que es otro criterio para establecer que dos triángulos son semejantes y argumenten su respuesta. Recuerden que para ser un criterio válido las condiciones deben garantizar que los triángulos son semejantes.

Dos triángulos son semejantes si:	¿Es un criterio de semejanza de triángulos?	Argumenten sus respuestas. Pueden hacer dibujos si lo consideran necesario o dar un ejemplo cuando crean que no es criterio.
Tienen igual uno de sus ángulos y uno de sus lados.		
Tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados que son proporcionales a sus correspondientes en el otro triángulo.		

Comparen sus respuestas y argumentos con sus compañeros de grupo.

>>> Manos a la obra

Cada uno haga lo siguiente en su libro sin ver lo que hace su compañero:

I. Consideren que el segmento abajo trazado es uno de los lados de un triángulo. Terminen de trazar el triángulo de tal manera que contenga un par de lados que formen un ángulo de 120°.

Cuando hayan terminado comparen los triángulos trazados por todos.

a) ¿Son semejantes? ______________________________

b) Argumenten su respuesta: ______________________________

c) Dos triángulos tienen un lado igual y un ángulo igual, ¿creen que necesariamente son semejantes? __________ ; ¿cómo lo saben? ______________________

II. Tracen en su cuaderno tres triángulos con las medidas indicadas:

- Un lado de 4 cm, otro de 6 cm y el ángulo comprendido entre ellos de 60°.
- Un lado de 8 cm, otro de 12 cm y el ángulo comprendido entre ellos de 60°.

a) Midan el tercer lado en cada triángulo. ¿Los lados de uno de los triángulos son proporcionales a los lados del otro triángulo? ______________________

Argumenten su respuesta: ______________________________

b) Midan los ángulos de los dos triángulos. ¿Qué notan? ______________________

c) ¿Son semejantes los dos triángulos? ______________________________

Argumenten su respuesta: ______________________________

d) Construyan un triángulo con un ángulo de 60° comprendido entre dos lados que sean proporcionales a 4 cm y 6 cm, ¿el triángulo construido es semejante a los anteriores?; ¿podrán construir un triángulo con estas condiciones (un ángulo igual comprendido entre dos lados que sean proporcionales a sus correspondientes en el otro triángulo) que no sea semejante a los anteriores?

>>> A lo que llegamos

Otro criterio de semejanza de triángulos es el siguiente:

Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados que son proporcionales a sus correspondientes en el otro triángulo.

Observen que, nuevamente, tampoco es necesario conocer todos los datos del triángulo para afirmar que son semejantes.

En el recuadro se enunció el tercer criterio de semejanza de triángulos que, junto con los dos que estudiaron en la sesión 2, son los tres criterios de semejanza de triángulos. Hagan un resumen en su cuaderno de los tres criterios e ilústrenlo con triángulos semejantes que cumplan las condiciones dadas en cada uno.

CÁLCULO DE DISTANCIAS

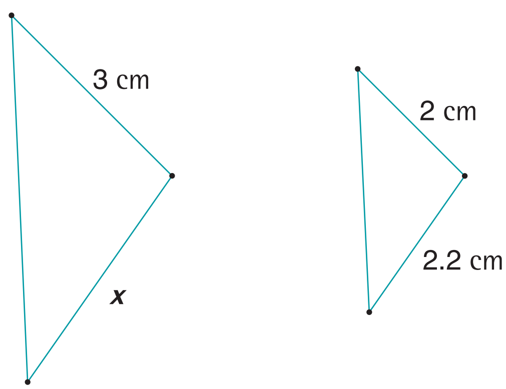
SESIÓN 4

>>> Lo que aprendimos

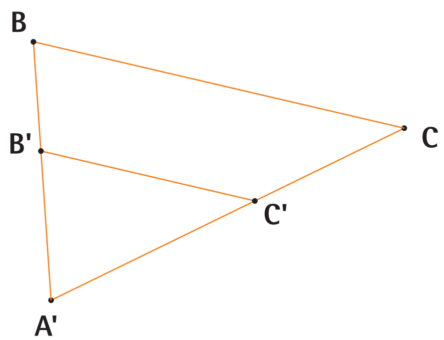
Una de las aplicaciones más útiles de la semejanza de triángulos es la de medir distancias inaccesibles a la medición directa.

Resuelvan los siguientes problemas.

1. Los triángulos son semejantes, ¿cuánto vale x? __________



2. En la siguiente figura, si el segmento **B'C'** es paralelo al segmento **BC**, entonces los triángulos **ABC** y **AB'C'** son semejantes. ¿Cuál criterio de semejanza garantiza esto? ______________

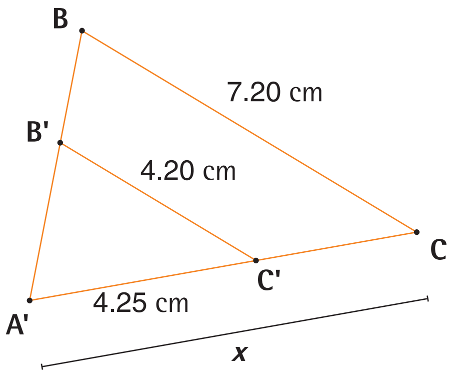


Pista:

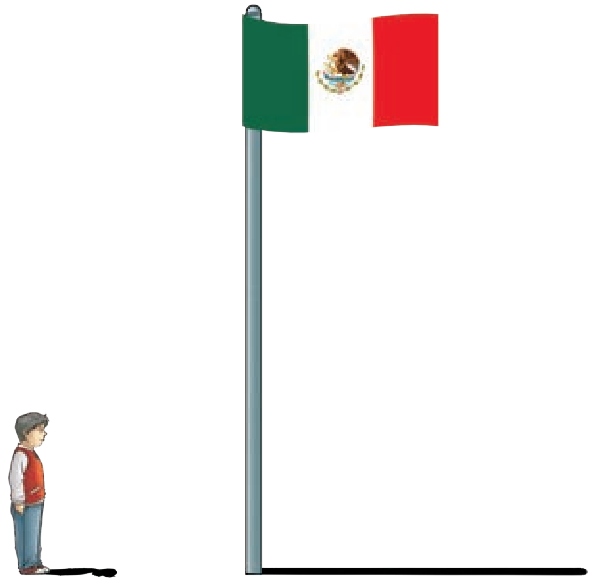
Recuerden las relaciones entre los ángulos entre paralelas

3. En la siguiente figura, el segmento **B′C′** es paralelo al segmento **BC**, ¿cuánto vale ***x***?

____



4. Una abuelita que mide 1.55 m lleva un bastón de 1 m. Si el bastón proyecta una sombra de 0.80 m, ¿cuánto mide la sombra de la abuelita? __________



5. Juan está junto al asta bandera de su escuela, mide las sombras y se da cuenta de que la sombra del asta es $\frac{7}{2}$ la de él. Si él mide 1.60 m, ¿cuál es la altura del asta?

____

6. Hagan lo siguiente:

a) Consigan una vara (palo, bastón, etc.); midan su longitud.

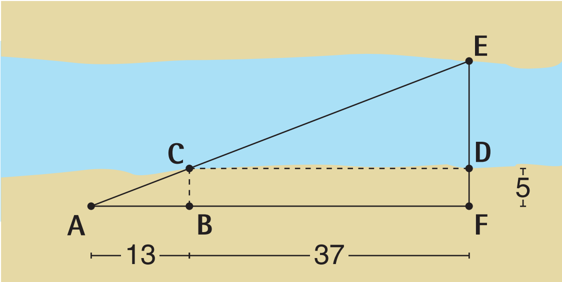
b) En algún momento que haya sol, salgan al patio, pongan la vara perpendicular al piso y midan la sombra que proyecta.

c) Elijan un objeto alto cuya altura deseen calcular: un árbol, el asta bandera, el alto de la canasta de basquetbol, etcétera.

d) Midan la sombra que proyecta ese objeto.

e) Con esos datos calculen la altura del objeto.

7. Consideren el siguiente dibujo en el que los segmentos **EF** y **CB** son perpendiculares a la orilla del río y el segmento **CD** es paralelo al segmento **BF**.



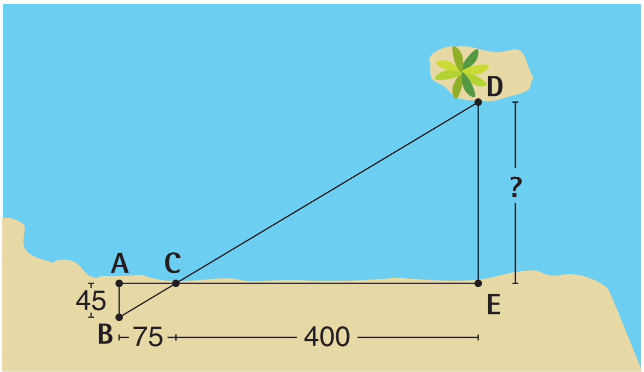
a) ¿Son semejantes los triángulos **ABC** y **CDE**? __________

Argumenten su respuesta: ______________________________

____

b) ¿Cuánto mide de ancho el río? ____________

8. En la siguiente figura consideren que $\overline{AB} \perp \overline{AE}$ y $\overline{DE} \perp \overline{AE}$. ¿A qué distancia se encuentra la isla de la orilla? ______________________________



9. Se tienen dos triángulos **ABC** y **HKM** y se sabe que $\measuredangle$**A** = $\measuredangle$**H** y que $\measuredangle$**B** = $\measuredangle$**K**.

a) ¿El tercer ángulo también es igual? ______________________________

b) ¿Cómo lo saben? ______________________________

c) ¿Los dos triángulos son semejantes? ______________________________

d) ¿Cómo lo saben? ______________________________

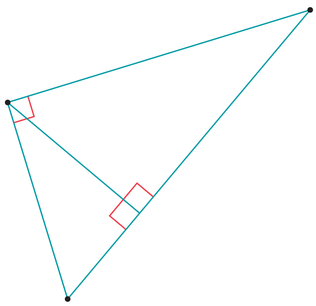
10. Se traza la altura correspondiente al lado mayor de un triángulo rectángulo: observen que se forman dos triángulos dentro del triángulo original.

a) ¿Son semejantes los dos triángulos que se forman? ____________

Argumenten su respuesta: ______________________________

b) Alguno de estos triángulos, ¿es semejante al triángulo original? ________

Argumenten su respuesta: ______________________________



>>> Para saber más

Sobre la semejanza de triángulos, consulten:
http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Semejanza_aplicaciones/triangulos_semejantes.htm
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Índices

En esta secuencia aprenderás a interpretar y utilizar índices para explicar el comportamiento de diversas situaciones.

SESIÓN 1

EL ÍNDICE NACIONAL DE PRECIOS AL CONSUMIDOR

>>> Para empezar

¿Cómo han variado los precios de los alimentos, la ropa, los zapatos y el transporte, durante el año? Con frecuencia esta información la encontramos en la sección financiera de los periódicos y en los noticieros. La presentan generalmente mediante porcentajes, a los que se les llama índices de precios.

>>> Consideremos lo siguiente

Para contestar las preguntas y completar la tabla de los incisos, lean el siguiente artículo publicado el 23 de febrero de 2007 en un periódico de circulación nacional, con los datos del aumento del precio de la tortilla y su repercusión en el Índice Nacional de Precios al Consumidor en la primera quincena de ese mes.

El aumento del precio de la tortilla sigue afectando la inflación: Banco de México

ROBERTO GONZÁLEZ AMADOR

El alza en el precio de alimentos y de algunos bienes ofrecidos por el sector público dispararon la inflación en la primera quincena de febrero, reportó este jueves el Banco de México (BdeM). Aunque ha perdido relevancia en la discusión pública durante los últimos días, la variación en el costo de la tortilla sigue afectando el comportamiento inflacionario, según el organismo.

El Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), indicador que mide la inflación, repuntó en la primera quincena de este mes 0.14 por ciento, el doble del nivel registrado en el mismo periodo de 2006. Según el reporte, el precio de la tortilla ha mostrado un comportamiento del todo inestable en los últimos días. En la quincena reportada, la inflación promedio de la tortilla fue de 16.1 por ciento, una variación anual que fue superior en 114 veces a la reportada por el INPC.

El promedio general es sólo una muestra de lo ocurrido en diferentes regiones del país. El banco central reportó que en la primera quincena de febrero la variación del precio de la tortilla de maíz en Torreón, Coahuila, fue de 29.84 por ciento, 13.7 puntos arriba del promedio nacional. La segunda variación más alta ocurrió en Cuernavaca, Morelos, con 28.35 por ciento; y la tercera en Jacona, Michoacán, con 26.15.

En cambio, en varias localidades la variación de precio en la quincena fue inferior al promedio nacional. Fue el caso de Tepic, Nayarit, con un incremento en el periodo de 2.4 por ciento; Ciudad Jiménez, Chihuahua, con 3.22 por ciento; y Tijuana, Baja California, con 3.35 por ciento.

Además de la medición del INPC, el banco central hace otros ejercicios para determinar el comportamiento de los precios. Es el caso del ''índice subyacente", que se obtiene eliminando del cálculo del INPC los bienes y servicios cuyos precios son más volátiles, lo que permite una aproximación a las tendencias de mediano plazo de la inflación.

En la primera quincena de este mes el ''índice subyacente" se incrementó 0.23 por ciento, arriba del 0.21 por ciento en el mismo periodo de 2006. Mientras, el ''índice no subyacente", donde se incorporan los precios más volátiles, disminuyó en la quincena 0.03 por ciento, cuando en el periodo comparable del año anterior lo había hecho 0.22 por ciento.

Esta menor disminución fue lo que explicó la mayor parte del repunte de la inflación general. Particularmente obedeció a menores reducciones que las observadas en 2006 en algunos precios administrados (que provee el sector público) y frutas y verduras.

Fuente: Roberto González Amador. "El aumento del precio de la tortilla sigue afectando la inflación: Banco de México", *La Jornada*, 23 de febrero de 2007, [recuperado el 2 de abril de 2008 de http://www.jornada.unam.mx/2007/02/23/index.php?section=economia&article=022n2eco].

a) De acuerdo con el artículo anterior, ¿qué es lo que mide el Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC)? ______________________

b) ¿Cuál fue el valor del repunte del INPC durante la primera quincena de febrero 2007?

____

c) ¿Y cuál fue el valor del repunte del INPC en ese mismo periodo pero en el año 2006?

____

d) Completen la siguiente tabla con la información de la variación del precio de la tortilla que aparece en el artículo.

	Variación del precio de la tortilla durante la primera quincena de febrero de 2007 (en porcentaje)
Torreón, Coahuila	
Cuernavaca, Morelos	
Jacona, Michoacán	
Tepic, Nayarit	
Ciudad Jiménez, Chihuahua	
Tijuana, Baja California	

e) Supongan que el precio promedio del kilogramo de tortilla, durante la primera quincena de febrero, fue de $8.50, ¿cuánto costó el precio del kilogramo de tortilla en Torreón en ese mismo periodo? ______________________

f) ¿Cuáles son los diferentes índices a que hace referencia el artículo? ______________________

g) Anoten una ✓ en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa:

El INPC puede utilizarse para mostrar la variación en el precio de algunos productos como el de la tortilla. **(V)** **(F)**

El aumento de la inflación durante la primera quincena de febrero de 2007 fue del doble con respecto a febrero de 2006. **(V)** **(F)**

La principal causa del aumento en el valor de la inflación en ese periodo se atribuye a la variación en el precio de la tortilla. **(V)** **(F)**

>>> Manos a la obra

I. A continuación se presenta otra noticia relacionada con el INPC que apareció el 20 de septiembre de 2007; léanla y respondan las siguientes preguntas.

Antes de que entre en vigor el impuesto a la gasolina ya aumentaron alimentos, luz y otros

En 9 meses el actual gobierno encareció 34.17% los básicos

Significa 7.5 veces el aumento a los salarios

Desde diciembre la gasolina subió 3.5%

ROBERTO GONZÁLEZ AMADOR

En apenas nueve meses y medio de la actual administración federal, el precio promedio de los productos que integran la canasta básica de consumo registró un incremento de 34.17 por ciento, 7.5 veces el aumento a los salarios concedido a los trabajadores en enero de 2007, según reportes oficiales.

Se trata de un alza de precios que comenzó con la tortilla al comienzo del año, continuó esta semana con el alza al pan blanco, y que tenderá a mantenerse en cuanto comience el ajuste al costo final de la gasolina, que ya fue autorizado en el Congreso y cobrará vigencia en cuanto sea publicado por el Ejecutivo en el *Diario Oficial de la Federación*.

Desde diciembre de 2006, el precio de los 43 productos que integran la canasta básica de consumo (INPC) ha subido en proporciones que superan con creces al repunte de la inflación general, que oficialmente es de 4.2 por ciento anual, con excepción del de la cebolla, que ha disminuido.

Esto ha ocurrido en un entorno en que el costo de la gasolina se ha elevado, de diciembre de 2006 a la fecha, en un promedio de 3.5 por ciento para ambos tipos de combustibles que ofrece Petróleos Mexicanos: Magna y Premium, según datos de la propia empresa.

Organizaciones de consumidores y representantes de la oposición política al gobierno denunciaron en la última semana que el incremento al precio de la gasolina desataría una escalada de precios, como tradicionalmente ocurre en el país cuando se mueve la cotización del energético.

La legislación aprobada la semana pasada en la Cámara de Diputados por los partidos Acción Nacional y Revolucionario Institucional establece que, en cuanto entre en vigor el nuevo impuesto, el precio se elevará dos centavos por mes durante un año y medio. Es decir, 36 centavos desde el valor actual. El Banco de México estimó que la aplicación gradual del impuesto al consumo de gasolina tendrá un impacto mínimo en el Indice Nacional de Precios al Consumidor, indicador que mide el comportamiento de la inflación.

Aun antes de que el efecto del nuevo precio de la gasolina se comience a expresar en la lista de precios de los productos de mayor consumo, las variaciones ocurridas en los últimos meses ya han superado con creces el aumento otorgado a los salarios.

En enero, el salario mínimo general tuvo un incremento de 4.1 por ciento. A mediados de este año, según el Banco de México, el incremento promedio en los salarios contractuales era de 4.26 por ciento y de 4.75 por ciento en el caso del aumento de los emolumentos en el sector manufacturero.

El incremento en las percepciones representa una fracción del alza registrada en el precio de los bienes de consumo básico, aun antes de que se comience a registrar el impacto de las gasolinas. Aunque los promotores del nuevo impuesto aseguran que no debe tener un impacto inflacionario, en comercios han comenzado a observarse algunas variaciones.

Desde diciembre de 2006 y hasta el 15 de septiembre pasado, el precio promedio de la canasta básica se elevó en 34.17 por ciento, mientras el costo promedio de los alimentos considerados en ese universo repuntó 36.01 por ciento, estableció una medición de la Procuraduría Federal del Consumidor y de la Secretaría de Economía.

Algunos ejemplos son: en diciembre de 2006 el precio de un kilogramo de harina de trigo era de 5.25 pesos, que creció la semana pasada a 10.50 pesos, un alza de 100 por ciento; el pan de caja en presentación de 680 gramos elevó su costo, en el mismo periodo, de 13.90 a 19.7 pesos, esto es, 41.6 por ciento. Ambos movimientos son consistentes con el alza en el precio internacional del trigo.

Fuente: Roberto González Amador. "En 9 meses el actual gobierno encareció 34.17% los básicos", *La Jornada*, 20 de septiembre de 2007, [recuperado el 2 de abril de 2008 de http://www.jornada.unam.mx/2007/09/20/index.php?section=economia&article=033n1eco].

a) Según la noticia del periódico, ¿cuántos son los productos que se consideran parte de la canasta básica? _______

b) De diciembre de 2006 a la fecha en que se publica el artículo, ¿cuál es el repunte de la inflación general? _______________________________

c) ¿Y cuál es el aumento promedio que ha tenido la gasolina en ese mismo periodo?

____

d) ¿Por qué creen que organizaciones de consumidores consideran que afectaría el aumento del precio de la gasolina al INPC? ________

e) Completen la siguiente tabla:

Productos	Presentación del producto	Precio del producto en $		Precio del producto en la primera quincena de septiembre de 2007 comparado con diciembre de 2006	
		Diciembre 2006	15 septiembre 2007	Porcentaje	Variación
Tortilla*	(kg)	6.00	8.50	141.6	41.6
Harina					
Pan de caja					

*Datos que corresponden a la Ciudad de México.
Fuente: Sistema Nacional de Información e Integración de Mercados (SNIIM). Secretaría de Economía.

f) Supongan que únicamente los tres productos de la tabla se consideran para calcular el Índice Nacional de Precios al Consumidor, ¿cuál sería el porcentaje promedio del precio de estos tres productos? ________

¿Y cuál sería la variación promedio del precio de los tres productos? ________

g) ¿Cuál de los tres productos de la tabla tuvo un aumento mayor en su precio (expresado en porcentaje) que el porcentaje promedio de diciembre de 2006 al 15 de septiembre de 2007? ________

____

>>> A lo que llegamos

El porcentaje promedio del precio de esos tres productos es un índice y se puede utilizar como referencia para observar cuál ha sido su variación de diciembre de 2006 al 15 de septiembre de 2007.

II. Ahora a la tabla anterior agreguen la información acerca de la gasolina.

a) ¿Qué dato anotarían en la columna de presentación del producto?

____

b) ¿Cuál sería el INPC considerando estos cuatro productos? ________

c) Supongan que a partir de la información anterior tienen que elaborar una nota periodística. Redacten una frase que pudiera servir como encabezado para esa nota.

____

>>> A lo que llegamos

El índice es un número, que puede estar en forma de porcentaje, mediante el cual se resume o expresa un conjunto de valores que corresponde a diversos elementos que intervienen en una situación y, también, se utiliza para establecer comparaciones dentro de esa situación. Un ejemplo de este tipo de índice es el Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC) que es un indicador económico; su finalidad es medir a través del tiempo la variación de los precios de un conjunto de bienes y servicios representativos del consumo de los hogares mexicanos. El INPC es el indicador oficial de la inflación en México.

SESIÓN 2

ÍNDICES EN LA ESCUELA

>>> Para empezar

Los índices no sólo se utilizan en la economía y las finanzas. También se usan en muchas otras áreas, por ejemplo, en la educativa, para describir el comportamiento de diversos fenómenos. Algunos ejemplos son el índice de reprobación, de deserción (alumnos que no concluyen sus estudios) y de eficiencia terminal (alumnos que concluyen sus estudios en tiempo y forma). Estos índices son los más representativos en relación con el éxito o fracaso escolar.

>>> Consideremos lo siguiente

A partir del ciclo escolar 1993-1994, la educación secundaria es parte de la educación básica en México, es decir, es obligatoria. La siguiente tabla muestra el número de alumnos que ingresaron a secundaria (matrícula) en el ciclo escolar 1993-1994; tomamos como referencia este dato para comparar la matrícula del ciclo 2000-2001 y obtener su variación. Continúen considerando la matrícula del ciclo escolar 1993-1994 como referente para comparar los otros ciclos escolares y completen la tabla.

Matrícula escolar en educación secundaria – Tabla 1

Ciclo escolar	Matrícula (en miles de alumnos)	Porcentaje	Variación de la matrícula en porcentaje
1993-1994	4 340	100.00	0
2000-2001	5 350	123.27	23.27
2001-2002	5 480		
2002-2003	5 660		
2003-2004	5 780		
2004-2005	5 894		

Fuente: SEP. *Estadísticas Básicas del Sistema Educativo Nacional*

¿Cuál es el porcentaje en que aumentó la matrícula del ciclo escolar 2004-2005 con respecto de la matrícula del ciclo escolar 1993-1994? ______

Si utilizan la información del ciclo escolar 2004-2005, ¿cuántos alumnos se espera que estuvieran inscritos en el ciclo 2005-2006? ______ ¿Por qué?

______

>>> Manos a la obra

I. Utilicen los datos de la tabla anterior para contestar las siguientes preguntas. Pueden usar calculadora para realizar las operaciones.

a) En el ciclo escolar 1993-1994, ¿cuál fue la matrícula de alumnos? ______

b) Completen la siguiente tabla para conocer la variación que ha tenido la matrícula de alumnos de secundaria en los ciclos escolares a partir del ciclo escolar 1993-1994.

Tabla 2

Ciclo escolar	Matrícula (en miles de alumnos)	Diferencia = matrícula – matrícula en el ciclo 1993-1994	% de diferencia = (diferencia / matrícula en el ciclo 1993-1994) × 100
1993-1994	4 340	0	0
2000-2001	5 350	1 010	(1 010 ÷ 4 340) × 100 = 23.27
2001-2002	5 480		
2002-2003	5 660		
2003-2004	5 780		
2004-2005	5 894		

c) Observen en la tabla que el ciclo escolar 1993-1994 muestra un valor de 0. ¿Qué representa este valor? ______

d) Comparen el porcentaje de diferencia que obtuvieron para el ciclo escolar 2000-2001 con el de la columna Variación de la matrícula en porcentaje de la tabla 1 del apartado *Consideremos lo siguiente*, ¿son iguales o diferentes? ______
¿Por qué? ______

e) De acuerdo con los resultados que obtuvieron, completen la siguiente conclusión:

Desde el ciclo escolar 1993-1994 hasta el ciclo escolar 2003-2004, la matrícula de alumnos ha ______ *, según se observa el porcentaje fue* ______ *con una variación de* ______

En el ciclo escolar 2004-2005, el porcentaje fue de ______ *con respecto al ciclo escolar 1993-1994. La variación fue de* ______

II. Si ahora consideran como referente la matrícula del ciclo escolar 2003-2004, es decir, el número de alumnos inscritos en educación secundaria 10 años después de ser obligatoria, *¿qué porcentaje representan los números de alumnos que se han inscrito en los demás ciclos escolares?* Anótenlos en la siguiente tabla:

Ciclo escolar	Matrícula (en miles de alumnos)	Porcentaje	Variación
1993-1994	4 340		
2000-2001	5 350		
2001-2002	5 480		
2002-2003	5 660		
2003-2004	5 780	100.0	0.0
2004-2005	5 894	101.9	1.9

a) Observen en la tabla que el ciclo base o de referencia muestra un porcentaje de 100. ¿Por qué? ____________________

b) En el ciclo escolar 2004-2005 se muestra un porcentaje de 101.9, ¿qué significa ese valor? ________________ ¿Y qué significa el valor de 1.9? ____________________

c) ¿En algún ciclo escolar el porcentaje es menor que 100? ________ ¿Por qué? ____________________

d) De acuerdo con la matrícula del ciclo escolar 2003-2004, ¿qué porcentaje representa el número de alumnos que se inscribieron en el ciclo escolar 1993-1994? ____________________

>>> A lo que llegamos

Cuando se comparan dos cantidades del mismo tipo pero medidas en distintos lugares, momentos o circunstancias, se obtiene un índice simple. Para calcular el valor de un índice simple se divide el valor que se quiere comparar entre un valor que se toma como referencia, llamado base. Si el índice simple se quiere expresar en forma de porcentaje, ese cociente se multiplica por 100.

III. La siguiente tabla muestra el número de alumnos reprobados en secundaria en el ciclo escolar 2003-2004 en algunos estados del país, encuentren el índice de reprobación en cada estado.

Estado	Alumnos reprobados (en miles)	Matrícula (en miles de alumnos)	Índice de reprobación (en %)
Aguascalientes	6.5	62	
Coahuila	10.3	135	
Chiapas	14.2	249	
Guerrero	16.9	181	
Hidalgo	9.0	155	
Nayarit	2.4	56	
Yucatán	16.7	102	
Nacional	555	5 780	9.6

a) Escriban cómo se podría comparar el número de alumnos reprobados con respecto a la matrícula de alumnos, en cada caso. ______________________

____

b) ¿En qué estado fue mayor el porcentaje de reprobación? ______________

c) ¿Coincide con el estado que tiene el mayor número de alumnos reprobados?

____

¿Por qué? ______________________________________

____

d) Con respecto al porcentaje de reprobación nacional, ¿cuáles estados tienen un porcentaje mayor a éste? ______________________________

Entre otros fines, se utiliza esta información para valorar la necesidad de reforzar los contenidos educativos y programas complementarios para disminuir estos índices.

SESIÓN 3

¿QUIÉN ES EL PELOTERO MÁS VALIOSO?

>>> Para empezar

El beisbol es un deporte que se juega con una bola dura y un *bat* entre dos equipos de nueve jugadores cada uno. Un partido de beisbol se divide en nueve periodos de juego, cada uno de los cuales se llama entrada o *inning*. El equipo que anote más carreras a lo largo de las nueve entradas gana el partido. El juego comienza cuando un jugador llamado lanzador o *pitcher*, lanza la bola hacia el bateador del equipo contrario quien intenta batear (golpear con el *bat*) la bola hacia el interior del terreno de juego. Los jugadores anotan carreras bateando la bola y corriendo alrededor de una serie de 4 bases, antes de que les elimine algún jugador de campo del equipo contrario. Si un bateador alcanza una base bateando una bola de forma que los jugadores del equipo contrario no consigan atraparla con éxito, el jugador ha conseguido un *hit*, y el corredor intenta avanzar, sin que le eliminen, el mayor número de bases posible. El *hit* con el que el bateador consigue alcanzar la segunda base se llama doble; con el que alcanza la tercera, se llama triple. Si un jugador al batear la bola sale volando por encima de la zona de juego y cae fuera de los límites es un cuadrangular o *homerun*.

Las entradas están divididas en dos mitades, llamadas principio y final de entrada. Durante el principio de una entrada, un equipo batea mientras el otro está en el campo. Cuando el equipo que batea tenga tres jugadores eliminados, los dos equipos intercambian sus papeles y comienza el final de una entrada. Si el resultado permanece empatado al final de nueve entradas, los dos equipos continúan jugando hasta que, al final de una o más entradas suplementarias, uno de los dos anote más carreras que el otro.

En el caso del beisbol, como en muchos otros, hay situaciones que se miden a partir de varios índices, cada uno de los cuales determina un aspecto diferente de la situación. Por ejemplo, para medir el rendimiento de un jugador de beisbol se necesita conocer la frecuencia, calidad y oportunidad de los *hits* que "conecta". Para conocer más sobre este deporte puedes consultar la página de internet que se señala en el apartado *Para saber más*.

>>> Consideremos lo siguiente

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos por tres jugadores de beisbol.

Tabla 1

Jugador	Número de turnos al *bat*	Número de *hits*				Número de bases alcanzadas	Número de carreras empujadas
		Sencillos	Dobles	Triples	Cuadrangulares *(homeruns)*		
A	500	100	30	10	10	230	30
B	500	120	20	10	—	190	35
C	250	30	20	—	20	150	30

¿Cuál de los tres jugadores consideran que tiene mejor desempeño como beisbolista?

____

Justifiquen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. A la frecuencia relativa con que pega de *hit* un jugador se le llama promedio de bateo (PB) y es la razón entre el número de *hits* (sencillos, dobles, triples y cuadrangulares) y el número de turnos al *bat*. En la siguiente tabla calculen el promedio de bateo de cada uno de los tres jugadores (se acostumbra utilizar tres cifras decimales para este promedio, por ejemplo, 0.270).

Tabla 2

Jugador	Número de turnos al *bat*	Número de *hits*					Promedio de bateo (Número total de *hits* / Número de turnos al *bat*)
		Sencillos	Dobles	Triples	Cuadrangulares *(homeruns)*	Total	
A	500	100	30	10	10		
B	500	120	20	10	—		
C	250	30	20	—	20		

a) ¿Para tener un mejor promedio de bateo, influye el tipo de *hit* que se pegue? ______

¿Por qué? ______________________________

b) De acuerdo con la distribución del tipo de *hits* que ha dado cada beisbolista, ¿cuál jugador consideran que es mejor? ______________________________

c) ¿Cuál jugador tiene mejor promedio de bateo? ______________________________

II. El promedio de porcentaje de bateo efectivo (en inglés *slugging*) es el número de bases alcanzadas por un bateador entre sus turnos al *bat*. En la siguiente tabla calculen el promedio de bateo efectivo para los tres jugadores.

Tabla 3

Jugador	Número de turnos al *bat*	Número de bases alcanzadas	Promedio de bateo efectivo (número de bases alcanzadas / número de turnos al *bat*)
A	500	230	[(100 × 1) + (30 × 2) + (10 × 3) + (10 × 4)] / 500 =
B	500	190	
C	250	150	

a) ¿Cuál es el jugador que tiene mejor promedio de bateo efectivo? ______________

b) ¿El jugador que tiene mejor promedio de bateo efectivo también tiene el mejor promedio de bateo (PB)? ______________________________

c) Expliquen por qué puede ocurrir esta situación ______________________________

III. En el beisbol, con mucha frecuencia, al final de cada entrada (turno a batear de cada equipo), quedan corredores en alguna o algunas de las bases, indicación de que no todos los *hits* se convierten en anotaciones o carreras. Por lo que es muy valorado aquel beisbolista que es capaz de pegar de *hit* teniendo jugadores en alguna base con posibilidades de anotar una carrera. La oportunidad de un *hit* se mide con el índice de carreras empujadas, el cual se obtiene dividiendo el número de carreras empujadas por el jugador entre el número de *hits* que conectó. Completen la tabla 4 y calculen el índice de carreras empujadas.

Tabla 4

Jugador	Número de *hits*	Número de carreras empujadas	Índice de carreras empujadas (número de carreras empujadas / número de *hits*)
A	150	30	
B	150	35	
C	70	30	

a) ¿Cuál es el jugador que tiene mejor índice de carreras empujadas? ____________

b) ¿El jugador que tiene mejor promedio de bateo efectivo y mejor promedio de bateo también tiene el mejor índice de carreras empujadas? ____________ Expliquen por qué ocurre esta situación ____________

IV. Completa la tabla 5 concentrando los indicadores de cada jugador que obtuvieron en las tablas anteriores.

Tabla 5

Jugador	Promedio de bateo	Promedio de bateo efectivo	Índice de carreras empujadas
A			
B			
C			

a) De acuerdo con los resultados, ¿quién tiene el máximo promedio de bateo?

____

b) ¿Quién tiene el máximo promedio de bateo efectivo? ____________

c) Si se consideran los tres porcentajes de cada jugador, ¿cuál jugador de beisbol consideran que es más valioso? ____________

Justifiquen su respuestas.

>>> A lo que llegamos

Existen muchas formas de construir un índice; desde métodos muy sencillos, hasta aquellos que pueden combinar varios índices agregados.

- Los índices simples son los más utilizados debido a su sencillez. Para crearlos únicamente es necesario comparar el valor de la variable estudiada contra el valor que se utilizará como referencia o base.
- En otras ocasiones es necesario crear un índice que incluya un conjunto de productos. Para construir este tipo de índices es necesario conocer tanto el valor como la cantidad de cada producto. Su desventaja es que cuando se incluyen productos con distintas unidades de medida o existen grandes diferencias entre los valores de los productos, el valor del índice se afecta.

Existen situaciones en las que un solo índice puede ser útil para valorar una parte de la situación, pero es insuficiente para valorar la situación en toda su complejidad.

Por ejemplo, en el caso del beisbol se tienen tres índices, el porcentaje de bateo, porcentaje de bateo efectivo y el porcentaje de carreras empujadas. Sin embargo, aun tomados en conjunto, si se quiere comparar la capacidad ofensiva total de un jugador, se requiere considerar otros resultados como, por ejemplo, su habilidad de "robar bases".

Otro ejemplo, los cambios del costo de la vida en un determinado tiempo se miden en parte por el Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), pero sin duda también influyen otras cuestiones como los salarios, la posibilidad de acceder a salud y educación de manera gratuita, etcétera.

Uno de los deportes en que México ha tenido importantes representaciones es el de los clavados. Para determinar el ganador de una competencia de clavados, un conjunto de 8 jueces califican, por rondas, elementos objetivos y subjetivos de cada clavado.

MÁS SOBRE ÍNDICES

SESIÓN 4

1. Solicita al profesor o director que te proporcione la información sobre las estadísticas del ciclo anterior; completa con ella la siguiente tabla:

Grado	Inscripción *	Bajas	Altas **	Existencia = Inscripción – bajas + altas	Porcentaje de deserción *** = (Inscripción – existencia / inscripción) × 100
Primero					
Segundo					
Tercero					
Total					

* Inscripción: alumnos inscritos antes del 30 de septiembre.
** Altas: alumnos inscritos después del 30 de septiembre.
*** Deserción: alumnos que no concluyen sus estudios.

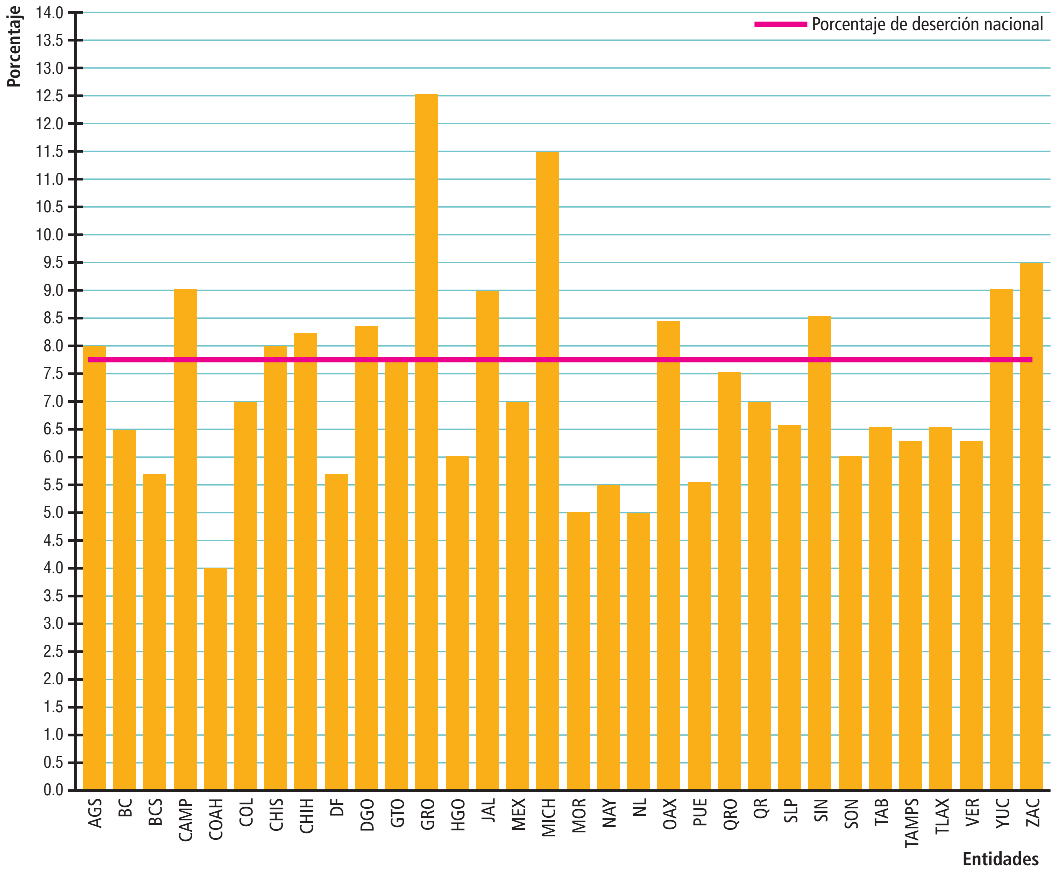
a) ¿En qué grado o grados la existencia fue menor a la inscripción? ______

b) Considera como base los resultados totales, ¿en algún grado el porcentaje de deserción fue mayor al del total? ______

c) ¿Qué significa esta situación? ______

2. La siguiente gráfica corresponde al porcentaje de deserción en secundaria por estado en el ciclo escolar 2003-2004.

Deserción en secundaria por entidad federativa, 2003-2004



Fuente: SEP, estimaciones a partir de las *Estadísticas Básicas del Sistema Educativo Nacional.*

a) ¿Cuál es el estado con mayor porcentaje de deserción escolar? ______

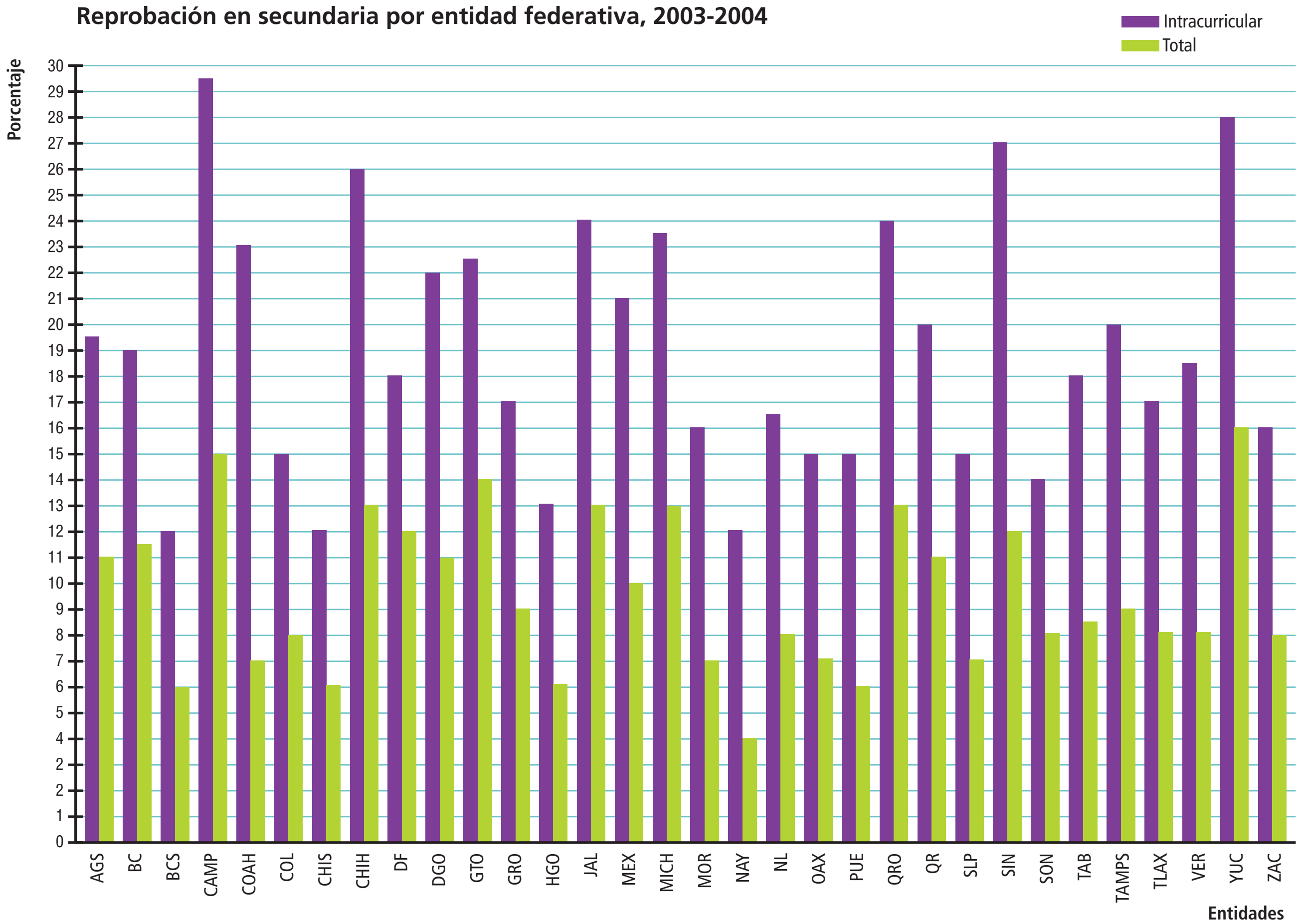
b) ¿Y cuál es el estado con menor porcentaje de deserción? ______

c) ¿Cuál es el porcentaje de deserción nacional en secundaria? ______

d) Con respecto al porcentaje de deserción nacional, ¿cuántos estados están por arriba de él? ______

e) ¿Cuántos estados están por debajo de él? ______

3. La siguiente gráfica muestra el índice de reprobación total del nivel secundaria y el índice de reprobación entre cada grado de ese nivel (se llama intracurricular).



Fuente: SEP, estimaciones a partir de las *Estadísticas Básicas del Sistema Educativo Nacional.*

a) ¿Cuánto más aumentó la reprobación intracurricular con respecto a la reprobación total en Aguascalientes? ______________________

b) ¿En qué entidad o estado la reprobación intracurricular fue mayor? __________

c) ¿El estado con mayor reprobación total es el mismo que tiene mayor reprobación intracurricular? ______________________

d) ¿Qué estado tiene la menor reprobación intracurricular? ______________

4. Consideren los valores de los índices de deserción, de reprobación nacional y de reprobación intracurricular de los problemas **2** y **3** para contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál consideran que es el estado que tiene mayores problemas en estos aspectos? __________ ¿Por qué? ______________________

b) Nuevamente, utilicen la información de los problemas **2** y **3**. Comparen ese estado con respecto a la valores de los indicadores a nivel nacional, escriban una conclusión y preséntenla a su grupo.

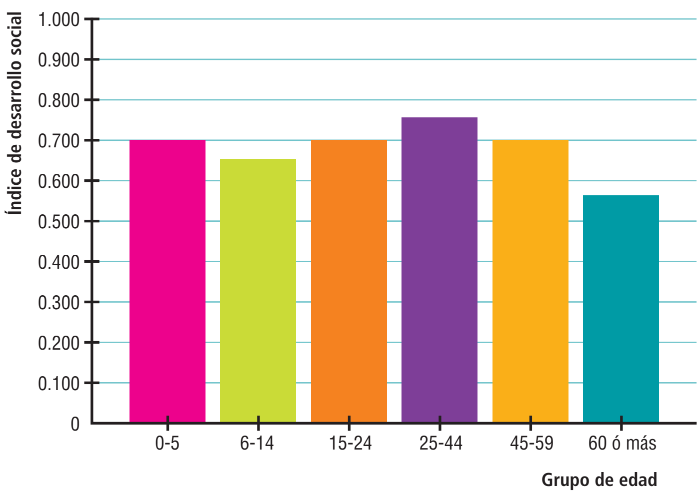
c) Observen los indicadores que corresponden al estado en que viven. Con respecto a los indicadores nacionales, ¿cómo se encuentran los indicadores de su estado, son superiores o inferiores? Describan cuál es la situación de los indicadores de su estado con respecto a los otros estados y a nivel nacional, y preséntenla a su grupo.

5. El Índice de Desarrollo Social (IDS) permite identificar contrastes y marcadas desigualdades entre los habitantes de una entidad, municipio o localidad. Se forma al considerar aspectos de educación, salud, trabajo y vivienda. Este índice se clasifica en cinco categorías:

Categoría	Valor del índice
Muy alto	0.875-1.0
Alto	0.750-0.874
Medio	0.625-0.749
Bajo	0.500-0.624
Muy bajo	Menos de 0.5

La siguiente gráfica muestra el índice de desarrollo social por grupo de edad.

Índices de desarrollo social por grupo de edad, 2000



Fuente: Estimación del Consejo Nacional de Población con bases en el *XII Censo de Población y Vivienda, 2000.*

a) ¿Cuál grupo de edad tiene el mayor índice de desarrollo social? ____________

¿En qué categoría se encuentra? ____________

b) ¿Cuál es el índice de desarrollo social de la población entre 6 y 14 años? ____________ ¿En que categoría se encuentra? ____________

c) ¿Cuál es el menor índice de desarrollo social? ____________

d) ¿Cuál es el grupo de edad a que corresponde ese índice? ____________________

e) ¿En qué categoría se encuentran? ____________ ¿Por qué crees que este grupo de edad tiene menor índice de desarrollo social? ____________________

____

6. Vayan a una tienda cerca de su casa o escuela. Obtengan el precio y la presentación de cuatro productos que consideren básicos (por ejemplo: arroz, fríjol, harina, aceite) u otros productos que el equipo decida. Anoten la fecha y regresen en un mes a preguntar por la misma información.

a) ¿Qué problemas tuvieron para recolectar dicha información? ________________

____

b) ¿Ha cambiado el precio de esos productos? __________

c) Utilicen un índice para expresar dichos cambios y escriban una conclusión.

____

____

>>> Para saber más

Sobre índices en la educación básica, consulten:
http://sieeb.basica.sep.gob.mx
Ruta 1: Estadística por servicio de la Educación Básica → Secundaria
Seleccionar según su interés el ciclo escolar, modalidad, nivel y sostenimiento.
Ruta 2: Reportes interactivos → estadística de la educación básica.
Seleccionar según su interés el ciclo escolar, nivel educativo, modalidad, Sostenimiento y entidad federal.
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Sistema de Información de Estadística de la Educación Básica. SEP.

Sobre cómo se juega el beisbol, consulten:
http://www.ibaf.tv/es/index.php?option=com_content&task=view&id=22&Itemid=45
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Federación Internacional de Beisbol.

Sobre el índice nacional de precios al consumidor, consulten:
http://www.banxico.org.mx/inpc
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Ruta 1: INPC → Definición → Importancia → Papel del Banxico.
Ruta 2: Elaboración INPC → Medición → Proceso → Identificación → Obtención → Cálculo INPC.
Ruta 3: Cambio de base → Base de comparación → Importancia.

Sobre el índice de desarrollo social, consulten:
http://www.conapo.gob.mx/publicaciones/desarrollo/001.pdf
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Consejo Nacional de Población.

SECUENCIA 13

Simulación

En esta secuencia aprenderás a resolver situaciones en las que interviene el azar mediante un proceso denominado simulación, que consiste en diseñar, para una situación aleatoria real, una segunda situación aleatoria cuyos eventos tengan la misma probabilidad de ocurrir que en la primera, con la ventaja de que en esta segunda situación podemos observar, calcular y utilizar los resultados para obtener información de la situación original.

SESIÓN 1

SIMULACIÓN

>>> Manos a la obra

I. Una compañía que vende paquetes de cereales busca incrementar sus ventas ofreciendo animales de plástico, uno por cada paquete. Son tres animales diferentes (elefantes, leones y jirafas) y se distribuyen de manera uniforme en las cajas de cereal de esa compañía. Si hoy comprara una caja de cereal de esa compañía, ¿cuál sería la probabilidad de que me toque un elefante?

Una opción sería comprar muchas cajas de cereal con base en las figuras de animales que salgan y realizar el cálculo. Otra, más económica consiste en utilizar alguno de los siguientes materiales y realizar con ellos una simulación de cuál animal de plástico podría salir en una de esas cajas de cereal.

1

2

a) Completen las siguientes tablas:

Material:	Dado
Resultados posibles que pueden obtenerse al lanzar un dado	
¿Cuáles de los resultados posibles de lanzar un dado representarían que el animal de plástico que salió de la caja de cereal era un elefante?	
¿Cuáles corresponderían a una jirafa?	
¿Cuáles corresponderían a un león?	

Material:	Urna de canicas
Resultados posibles que pueden obtenerse al extraer una canica	
Entre una extracción y otra, ¿será necesario regresar la canica a la caja? ¿Por qué?	
¿Cuáles de los resultados posibles de extraer una canica representarían que el animal de plástico que salió de la caja de cereal era un elefante?	
¿Cuáles corresponderían a una jirafa?	
¿Cuáles corresponderían a un león?	

II. Ahora cada equipo seleccione el dado o la urna con canicas, y en su cuaderno anoten los resultados en una tabla como la siguiente. Realicen el experimento 50 veces.

Número de ensayo	Resultados	
	En la simulación con el material que seleccionaron	En la situación aleatoria

a) De acuerdo con los resultados que obtuvieron, ¿cuál fue el resultado que más veces apareció?

____

b) Según los resultados de este experimento de simulación, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de que me toque una caja de cereal con un elefante?

____

Recuerden que:

*La **probabilidad frecuencial** es un valor obtenido de la experiencia de algún fenómeno o experimento aleatorio que permite estimar a futuro un comportamiento. Sin embargo, no es definitiva, por lo que es importante saber interpretar los resultados que se obtienen.*

La probabilidad frecuencial de un evento A, que se denotará P(A), se obtiene dividiendo el número de veces que ocurre el evento entre el número total de veces que se realizó el experimento.

$$P(A) = \frac{\text{Número de veces que ocurre el evento}}{\text{Número de veces que se realiza el experimento}}$$

III. Consideren las condiciones del problema original:

Una caja de cereal puede contener un elefante de plástico o un león o una jirafa.

a) Si la empresa distribuyó de manera uniforme esos animales de plástico en las cajas, ¿cuál es la probabilidad clásica de que al comprar una caja de cereal, ésta contenga un elefante de plástico? ____________

b) A partir de los resultados de la simulación con el dado, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de que el animal de plástico que me toque en la caja de cereal sea un elefante? ____________

c) ¿Y si se consideran los resultados de la simulación con la urna de canicas? ____________

d) ¿Cuál de estos valores de las probabilidades frecuenciales (incisos b y c) es más cercano al valor de la probabilidad clásica (inciso a)? ________________

Recuerden que:

Para obtener la ***probabilidad clásica*** *de un evento no se requiere de la realización de experimentos, como en la probabilidad frecuencial, sino de conocer dos datos:*

- *El número de todos los resultados posibles que se pueden dar en una situación de azar.*
- *El número de resultados favorables de un evento de esa situación.*

Se llama probabilidad clásica de un evento al número P(e) que se obtiene por medio del cociente:

$$P(e) = \frac{\text{Número de resultados favorables del evento}}{\text{Número total de resultados posibles}}$$

>>> A lo que llegamos

La simulación consiste en diseñar, para una situación aleatoria real (problema), una situación aleatoria cuyos eventos tienen la misma probabilidad clásica de ocurrir que los de la primera situación, con la ventaja de que en la simulación podemos observar los resultados y calcular los valores de la probabilidad frecuencial y utilizarlos para obtener información sobre el problema. Para poder realizar una simulación es posible utilizar algún material u objeto manipulable como urnas, dados, monedas, ruletas, tabla de números aleatorios, etcétera.

>>> Lo que aprendimos

1. En un hospital, dos bebés están a punto de nacer. Se quiere saber cuál es la probabilidad de los siguientes eventos:

   A: *Los dos recién nacidos son niñas.*

   B: *Los dos recién nacidos son niños.*

   C: *Un recién nacido es niña y el otro niño.*

a)

b)

a) ¿Qué resultado de la moneda asociarías al nacimiento de un varón? ____________ ¿Y al de una niña? ____________

b) ¿De acuerdo con lo anterior qué interpretación darías al hecho de que al lanzar las dos monedas una cayera águila y la otra sol? ____________

c) ¿Qué resultados de la urna de canicas representarían al nacimiento de un varón? ____________ ¿Y al de una niña? ____________

d) ¿Cuántas canicas es conveniente tomar en cada extracción? ____________

e) Entre una extracción y otra, ¿será necesario regresar las canicas a la urna? ____________ ¿Por qué? ____________

APLICANDO LA SIMULACIÓN

SESIÓN 2

>>> Para empezar

El control de calidad de productos es un ejemplo de las áreas en que la simulación resulta de gran ayuda.

>>> Consideremos lo siguiente

Con 36 kg de vidrio líquido se fabrican 36 botellas. En el vidrio líquido hay 36 impurezas repartidas de manera aleatoria.

a) ¿Creen que cada botella tendrá una impureza? ____________

b) ¿Creen que haya botellas sin ninguna impureza y botellas con más de una impureza?

____

c) ¿Creen que haya más botellas con una impureza o más con dos impurezas? ________

Comenten sus respuestas con sus compañeros.

>>> Manos a la obra

I. Se puede simular la situación anterior con dos dados distinguibles, por ejemplo, uno azul y uno rojo.

Los 36 resultados posibles que hay al lanzar los dos dados representan las 36 botellas. En la siguiente cuadrícula se muestran esos 36 resultados posibles, cada uno de los cuales representa una botella del problema planteado. Por ejemplo, la celda (3, 4) representa a la botella 16.

Dado B

Dado A	1	2	3	4	5	6
1	Resultado posible 1, 1 Botella 1	Resultado posible 1, 2 Botella 2	Resultado posible 1, 3 Botella 3	Resultado posible 1, 4 Botella 4	Resultado posible 1, 5 Botella 5	Resultado posible 1, 6 Botella 6
2	Resultado posible 2, 1 Botella 7					
3				Resultado posible 3, 4 Botella 16 ● ●		
4			Resultado posible 4, 3 Botella 21 ●			
5						Resultado posible 5, 6 Botella 30
6	Resultado posible 6, 5 Botella 31					

De este modo:

- Si al lanzar los dos dados el resultado es, por ejemplo, (3, 4), se anota un punto en esa celda, lo que representa que la botella 21 contiene una impureza.

- Puede ocurrir que un mismo resultado (tiro) se obtenga (o salga) más de una vez, como se muestra en la cuadricula en la que la celda (3, 4) tiene dos puntos, lo que representa que la botella 16 contiene 2 impurezas.

  Es decir, en dos ocasiones, en los dados azul y rojo han caído 3 y 4 respectivamente.

- Lancen los dados 36 veces para determinar de qué manera están distribuidas las impurezas en las botellas.

Registren sus resultados en la siguiente cuadricula.

Dado B

Dado A	1	2	3	4	5	6
1	Resultado posible 1, 1 Botella 1	Resultado posible 1, 2 Botella 2	Resultado posible 1, 3 Botella 3	Resultado posible 1, 4 Botella 4	Resultado posible 1, 5 Botella 5	Resultado posible 1, 6 Botella 6
2	Resultado posible 2, 1 Botella 7					
3				Resultado posible 3, 4 Botella 16		
4			Resultado posible 4, 3 Botella 21			
5						Resultado posible 5, 6 Botella 30
6	Resultado posible 6, 5 Botella 31					

a) ¿Cuántas celdas no tienen punto? ____________

b) Las celdas que no tienen ningún punto marcado indican que esa botella:

- ☐ Tiene una impureza.
- ☐ Tiene dos impurezas.
- ☐ No tiene impureza.
- ☐ Tiene más de tres impurezas.

c) ¿Cuántas celdas tienen solamente un punto? ____________

d) ¿Es posible que en una botella se encuentren más de 5 impurezas? ____________

¿Por qué? ____

e) Según los resultados que obtuvieron, los cuales simulan una revisión de 36 botellas, ¿crees que, si realizas otra vez la simulación, serían los mismos? ____________

¿Por qué? ____

II. Completen la siguiente tabla y después contesten las preguntas:

Al realizar la simulación	Lo que representa en el problema planteado
Total de celdas sin punto	**Total de botellas sin impurezas**
Total de celdas con un punto	**Total de botellas con una impureza**
Total de celdas con dos puntos	**Total de botellas con dos impurezas**
Total de celdas con tres puntos	**Total de botellas con tres impurezas**
Total de celdas con más de tres puntos	**Total de botellas con más de tres impurezas**

a) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que una botella no tenga impurezas?

____

b) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que una botella tenga solamente una impureza?

____

c) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que una botella tenga más de tres impurezas?

____

d) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que una botella tenga entre una y dos impurezas?

____

e) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que una botella tenga al menos dos impurezas?

____

Los valores de las probabilidades frecuenciales que obtuvieron en su equipo al simular la situación pueden interpretarse como los resultados de la revisión de una muestra de 36 botellas. De tal modo que si en el grupo se formaron 10 equipos y cada uno realizó la simulación, entonces podría decirse que hay 10 muestras diferentes del problema planteado.

III. Completen la siguiente tabla con los valores de la probabilidad frecuencial que en cada equipo se obtuvo y calculen el promedio de esas probabilidades. Después de hacerlo, contesten las siguientes preguntas.

Probabilidad frecuencial de:	**Valores de la probabilidad frecuencial por equipo**										**Promedio**
	Equipo 1	**Equipo 2**	**Equipo 3**	**Equipo 4**	**Equipo 5**	**Equipo 6**	**Equipo 7**	**Equipo 8**	**Equipo 9**	**Equipo 10**	
Botellas sin impurezas											
Botellas con una impureza											
Botellas con dos impurezas											
Botellas con tres impurezas											
Botellas con más de tres impurezas											

a) La tabla anterior muestra la probabilidad frecuencial promedio de cinco eventos que pueden ocurrir al revisar varios lotes de botellas. ¿Cuál de esos cinco eventos es más probable que ocurra? ______ ¿Por qué? ____________________________

b) Supongan que no hay dados para realizar la simulación anterior, ¿cuál de los siguientes experimentos realizarían para simular la situación original? Márquenlo con una ✓.

- ☐ Una bolsa con doce papelitos numerados del 1 al 6, de tal manera que habrá dos papelitos de cada número; se extrae un par de papelitos, se anotan los números y se regresan.
- ☐ Dos bolsas cada una con seis papelitos numerados del 1 al 6; se extrae un papelito de cada bolsa, se anota el número y se regresan.
- ☐ Doce papelitos en una bolsa numerados del 1 al 12; se extrae un papelito, se anota el número y se regresa.
- ☐ Dos bolsas cada una con seis papelitos numerados del 1 al 6; se extrae un papelito de cada bolsa, se anota el número y no se regresan.

c) Según los resultados que obtuvieron, al reunir los de cada equipo, ¿creen que si realizan otra vez la simulación serían los mismos? ______ ¿Por qué? __________

____

SIMULACIÓN Y TIROS LIBRES

SESIÓN 3

>>> Consideremos lo siguiente

Un jugador de basquetbol va a lanzar tres tiros libres. La estadística indican que la probabilidad de que enceste un tiro es 0.5. Los resultados entre un tiro y otro son independientes.

¿Cuál es la probabilidad de que el jugador enceste en 20 intentos tres tiros libres seguidos?

Se puede responder esta pregunta haciendo una simulación:

De una caja que contiene diez papelitos iguales, numerados del 0 al 9, se extrae un papelito, se registra el número obtenido y se regresa a la caja. Se repite este proceso 20 veces. El resultado de cada extracción representa un acierto o un fallo del tiro libre.

Observen la siguiente tabla con los resultados de 20 extracciones, que representan los resultados de 20 tiros libres.

	Resultados																			
Número del papelito que extrae	1	9	2	2	3	9	5	0	3	4	0	5	7	5	6	2	8	7	1	3
Resultado del tiro libre A = acierto F = fallo	A	F	A	A	A	F	F	A	A	A	A	F	F	F	F	A	F	F	A	A
Serie de tres tiros libres acertados																				

a) ¿Qué números se utilizaron para indicar que el tiro libre fue encestado? __________

b) ¿Y para señalar que el tiro se falló? _____

c) La primera serie de tres tiros seguidos es: _____

A	F	A	A	A	F	F	A	A	A	A	F	F	F	F	A	F	F	A	A

Primera serie de tiros libres seguidos

La segunda serie de tres tiros seguidos es: _____

A	F	A	A	A	F	F	A	A	A	A	F	F	F	F	A	F	F	A	A

Segunda serie de tiros libres seguidos

La tercera serie de tres tiros seguidos es: _____

A	F	A	A	A	F	F	A	A	A	A	F	F	F	F	A	F	F	A	A

Tercera serie de tiros libres seguidos

¿Cuántas series de tres tiros seguidos se obtendrían en total? _____

d) ¿Cuántas series de tres tiros seguidos serían si hubieran sido cinco tiros? _____

¿Y en seis tiros? _____

e) ¿Y en 10 tiros? _____

f) ¿Y en 20 tiros? _____

g) De acuerdo con la simulación de 20 tiros que se realizó, ¿cuántas series de tres tiros libres ha acertado el jugador? _____ Cuéntalos en la primera tabla.

h) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que en 20 tiros el jugador enceste tres tiros libres seguidos? _____

Comparen sus respuestas con las de otras parejas de compañeros

>>> Manos a la obra

I. Realicen la simulación anterior. En su cuaderno, deberán elaborar una tabla como la anterior y anotar los resultados de 200 tiros libres. Luego, contesten las siguientes preguntas:

a) De acuerdo con la simulación que realizaron, ¿cuántas series de tres tiros libres hay en 200 tiros? _____

b) ¿Cuántas series de tres tiros libres seguidos ha acertado el jugador? ____________

c) De acuerdo a los resultados obtenidos en su simulación ¿cuál es la probabilidad frecuencial de que, en 200 intentos, el jugador anote tres tiros libres de manera consecutiva? ________

d) Si consideramos que el jugador tiene una probabilidad de anotar de 0.5 en cada tiro, ¿cuál es la probabilidad clásica de que acierte los tres tiros? ______________

e) Comparen sus respuestas. ¿Qué tan cercana es la probabilidad frecuencial que obtuvieron en el inciso c) con respecto a la probabilidad clásica del inciso d)?

____

f) ¿De qué otra manera se podría simular la situación que se presenta en el apartado *Consideremos lo siguiente*?

____

En la mayoría de los experimentos de simulación, para obtener resultados confiables se necesita realizar un número grande de repeticiones.

II. Realicen los siguientes dos experimentos. Los resultados que obtengan los utilizarán en la siguiente actividad.

a) De una urna que contiene cuatro canicas de colores diferentes, como la que se muestra a la derecha, se extrae una canica:

Observen su color y anoten en las líneas el número que le corresponde al color que sacaste, de acuerdo con el código que se presenta en la siguiente tabla.

Color de la canica	Número que anotas
Rojo	1
Azul	2
Verde	3
Amarillo	4

Luego, regresen la canica a la urna y realicen otra extracción.

Repitan el proceso hasta completar 50 extracciones.

b) Lancen un dado 50 veces.

Anoten cada número que cae en las siguientes celdas.

Resultados

III. Imaginen que, en lugar de utilizar los 10 papelitos para simular el lanzamiento del tiro libre, utilizan los resultados que obtuvieron con la urna de canicas y el dado en la actividad anterior.

a) ¿Cómo utilizarían los números obtenidos en la urna para señalar el resultado de los tres tiros libres? ______________________

b) En el caso de la lista obtenida con el dado, ¿cuándo se representaría un acierto y cuándo un fallo? ______________________

c) Elijan una de las dos listas. De acuerdo con la simulación que realizaron, ¿cuántas series de tres tiros libres ha conseguido el jugador? ____________

d) ¿Cuántas series de tres tiros libres ha acertado el jugador? ____________

e) ¿Cuál es la probabilidad que tiene el jugador de anotar tres tiros libres seguidos en 20 intentos? ____________

>>> A lo que llegamos

Cuando un conjunto de números se genera al azar, se llama conjunto de números aleatorios. Esos conjuntos pueden estar formados por los dígitos (por ejemplo, cuando usamos los 10 papelitos); por los números del 1 al 4 (con las canicas de colores) y con los números del 1 al 6 (con el dado).

>>> Lo que aprendimos

1. Si la probabilidad de enceste o anotación del jugador de basquetbol es de 0.7:

a) ¿Qué números en los papelitos utilizarías para indicar que el tiro libre es encestado?

____

b) ¿Qué números utilizarías para señalar que se falló el tiro? ____________

c) De acuerdo con la simulación que se realizó, ¿cuáles serían los nuevos resultados de las anotaciones? Completa la tabla.

	Resultados																			
Número del papelito que extrae	1	9	2	2	3	9	5	0	3	4	0	5	7	5	6	2	8	7	1	3
Resultado del tiro libre A = acierto F = fallo																				
Serie de tres tiros libres acertados																				

d) ¿Cuántas series de tres tiros libres ha acertado el jugador? ____________ Cuéntalos en la tabla anterior.

e) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que el jugador enceste tres tiros libres seguidos? ____________

f) Si consideramos que el jugador tiene una probabilidad de anotar de 0.7 en cada tiro y que son lanzamientos independientes, ¿cuál es la probabilidad clásica de que anote los tres tiros? ____________

g) Compara esta probabilidad clásica con la probabilidad frecuencial de que el jugador anote los tres tiros. ¿Por cuánto se aproxima la probabilidad calculada en el inciso e) a la probabilidad clásica? ________________________

2. Imagina que respondes a un examen de diez preguntas con falso o verdadero, pero sólo conoces las respuestas de cinco preguntas.

a) ¿Cómo simularías esta situación? Escríbela en tu cuaderno.

b) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen si respondes al azar las otras cinco preguntas? ____

>>> Para saber más

Sobre cómo se realiza una simulación en el experimento de Buffon al encontrar una manera para aproximar el valor de *pi* (π), consulta:
http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/buffon.html
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].

Bibliografía

González, Roberto. "El aumento del precio de la tortilla sigue afectando la inflación: Banco de México". *La Jornada*, 23 de febrero de 2007 [recuperado el 2 de abril de 2008 de http://www.jornada.unam.mx/2007/02/23/index.php?section=economia&article=022n2eco].

- "En 9 meses el actual gobierno encareció 34.17% los básicos". *La Jornada*, 20 de septiembre de 2007 [recuperado el 2 de abril de 2008 de http://www.jornada.unam.mx/2007/09/20/index.php?section=economia&article=033n1eco].

Grandjean, Ann y Sheila Campbell. *Hidratación: líquidos para la vida*. México: ILSI de México, A.C., 2006 [recuperado el 16 de abril de 2008 de http://www.nutrinfo.com/pagina/e-books/hidrat.pdf].

Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, 23 agosto 2003 [recuperado el 3 de abril de 2008 de http://www.inegi.gob.mx].

SEP. *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*. México, 2000.

- *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*. México, 2000.

- 24 septiembre 2007 [recuperado el 3 de abril de 2008 de http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/index.htm].

SEP/ILCE. *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (Emat). Educación Secundaria*. México, 2000.

- *Geometría dinámica. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (Emat). Educación Secundaria*. México, 2000.

- *Biología. Enseñanza de las Ciencias a través de Modelos Matemáticos (Ecamm). Educación Secundaria*. México, 2000.

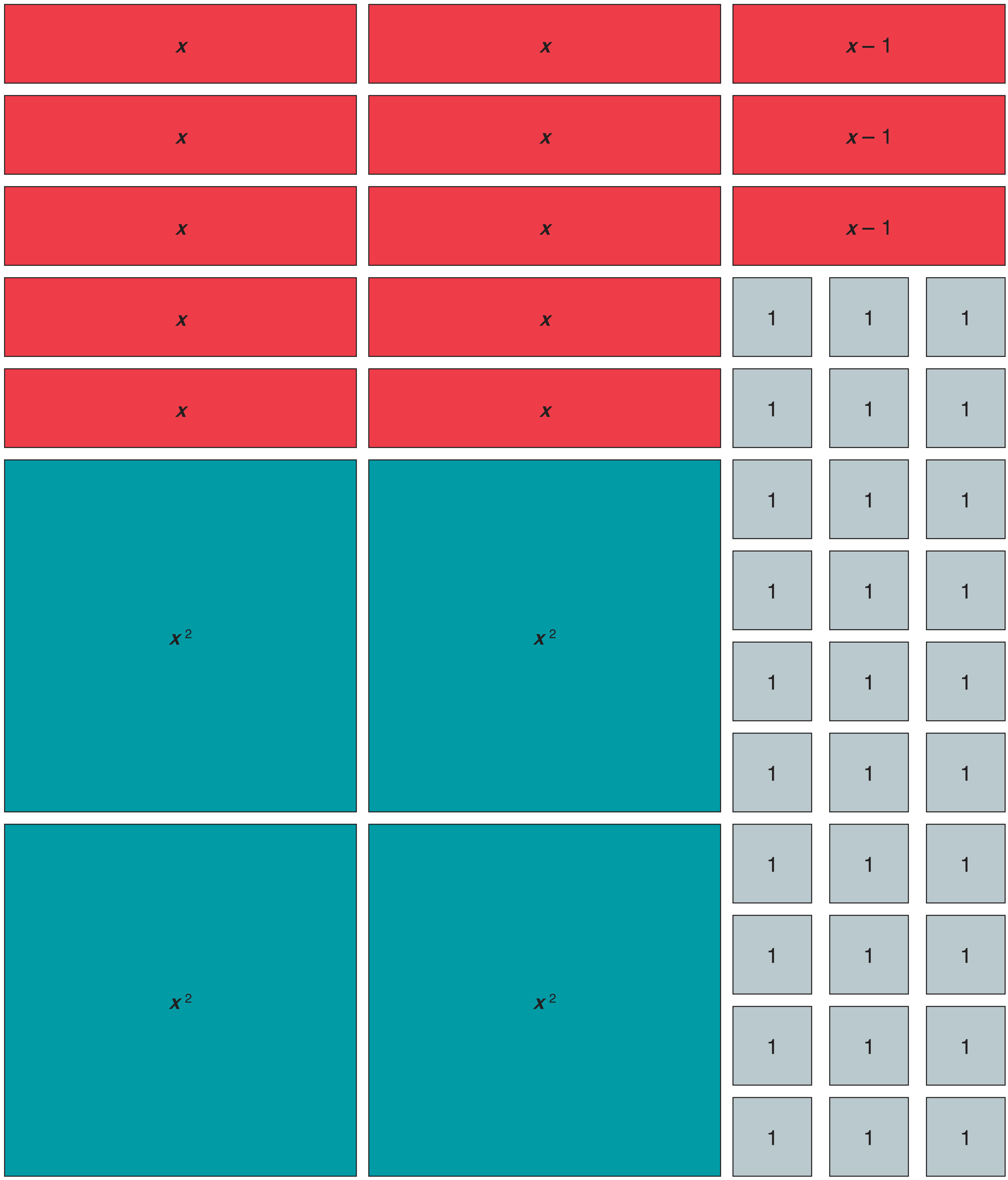
MATEMÁTICAS III

se imprimió por encargo de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos,
en los talleres de ,

El tiraje fue de ejemplares.

Recortables

BLOQUES ALGEBRAICOS



Ingestión de agua a partir de alimentos y bebidas consumidos frecuentemente

BEBIDAS NO ALCOHÓLICAS	
Agua, té preparado, café preparado, refrescos de dieta, té enlatado/embotellado, bebidas deportivas, limonada, jugo vegetal.	90% a 100%
Leche (descremada, 1%, 2%; entera; chocolate), refrescos (regular), jugo de frutas, bebidas de frutas.	85% a 90%

SOPA	
Consomé, cebolla francesa, carne y vegetales, de verduras, jitomate, crema de hongos (elaborada con agua).	90% a 95%
Pasta con pollo, concentrado de verduras, sopas concentradas, jitomate, crema de hongos (elaborada con leche).	80% a 90%

FRUTAS Y VERDURAS	
Fresa, melón, toronja, uva, durazno, pera, naranja, manzana, pepino, lechuga, apio, jitomate, calabaza, brócoli, cebolla, zanahoria	80% a 85%
Plátano, papa, maíz	70% a 75%

LÁCTEOS	
Queso cottage y yogur	75% a 80%
Pudín, malteada, licuado con huevo	70% a 75%
Helado	50% a 60%
Queso	40% a 50%

CEREALES	
Cereales preparados	85% a 90%
Arroz y pasta	65% a 80%
Pan, bagels, bísquets	30% a 45%
Cereales para desayunar, listos para comer	2% a 5%

CARNE, PESCADO, HUEVOS	
Pescados y mariscos	70% a 80%
Huevos (revueltos, fritos), omelette, sustituto de huevo	65% a 80%
Res, pollo, cordero, cerdo, pavo, ternera	45% a 65%
Cecina, tocino	15% a 30%

PLATILLOS COMBINADOS	
Estofado, pasta con carne, cacerolas (con y sin carne), tacos, enchiladas, macarrón con queso	60% a 80%
Pizza	50% a 60%

BEBIDAS QUE SUSTITUYEN COMIDAS	
Todas las bebidas para pérdida de peso, aumentar músculos y reemplazar comidas	70% a 85%

SEMILLAS Y NUECES	1% a 5%

SALSAS	
Salsas	50% a 85%
Aderezos (salsa, base crema agria, frijol)	70% a 90%

Fuente: Grandjean, Ann y Sheila Campbell. *Hidratación: líquidos para la vida*. México: ILSI de México, A.C., 2006 [recuperado el 2 de abril de 2008 de http://www.ilsi-mexico.org/publicaciones].